Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ tout entier et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites de fonctions

1.1 Préliminaires

Définition 1.1

Soient X, E, J trois ensembles.
Soit $\mathscr{A}(X,E)$ l'ensemble des applications de X dans E.

- Une famille d'applications de X dans E, indexée par J, c'est-à-dire une famille de $\mathscr{A}(X,E)$, est une application de J dans $\mathscr{A}(X,E)$.
- Une suite d'applications de X dans E, c'est-à-dire une suite de $\mathscr{A}(X,E)$, est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathscr{A}(X,E)$.

Exemples 1.2

- $J = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}$.
  Soit la famille, indexée par J, d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_a(x) = ax$ pour tout a de J.
  Les courbes représentatives des $(f_a)_{a\in J}$ sont les droites du plan qui passent par l'origine (excepté l'axe des ordonnées).
- $X = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}$.
  Soit la famille, indexée par $\mathbb{N}$, d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = (-1)^n x$.
  Les courbes représentatives des fonctions de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alternativement la première et la deuxième diagonale.

Remarques 1.3

- On parle aussi de la suite (de fonctions) de terme général f_n.
- Même si, par abus, on rencontre parfois (en général dans un cadre pratique) la notation $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour exprimer la suite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la notation $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ correspond théoriquement à une suite d'éléments de l'ensemble d'arrivée des (f_n).
  Par exemple, si le contexte n'est pas clair, la suite $(\sin nx)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être à la fois une suite de fonctions ou une suite numérique. Dans ce dernier cas, x est un réel fixé.

Propriété (rappel) 1.4

L'ensemble $\mathscr{B}(I,K)$ des applications bornées de I dans K est un s.e.v. de l'e.v. $\mathscr{F}(I,K)$ de toutes les fonctions de I dans K (muni des lois usuelles).
C'est un espace vectoriel normé (e.v.n.) quand on le munit de la norme (dite de la convergence uniforme) définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$.

Remarques 1.5

- La distance associée à cette norme est $d(f,g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$.
- Nous allons montrer dans ce chapitre que cet e.v.n. est complet.
- On peut étendre la propriété 1.4 à l'ensemble des applications bornées d'un ensemble quelconque X vers un espace métrique (E,d) en prenant $\|f\| = \sup_{x\in I} d(f(x),0)$.
  On obtient un e.v.n. complet si (E,d) est complet.

1.2 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 1.6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans K.
On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si, pour tout x de I, la suite numérique de terme général $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ dans K. On a donc : $\forall x\in I,\ f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Exemples 1.7

- Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n + \cos nx}$ (pour $n \geq 2$).
  $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n \geq 2,\ 0 \leq |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n-1}$. On a, $\forall x\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. On note $f_n \overset{CVS}{\longrightarrow} f = 0$.
- Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1 + nx^2}$.
  $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq |g_n(x)| \leq \dfrac{1}{1 + nx^2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.
  $\forall n\in\mathbb{N},\ g_n(0) = 1$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(0) = 1$.
  La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

Remarques 1.8

- Avec les notations de la définition 1.6, on dit que f est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Toujours avec les mêmes notations, l'application f (définie sur I) doit vérifier :
  $\forall x\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ /\ (\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
  ou $\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in I,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ /\ (\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
  On remarquera donc que l'entier n_0 est fonction de ε mais aussi de x.
- Puisque $(\forall x\in I,)\ f_n(x) - f(x) = (f_n - f)(x)$, il est identique de montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f ou de montrer que la suite $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
- On peut définir de la même façon la convergence simple lorsque l'on considère une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique :
  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E où X est un ensemble et (E,d) un espace métrique.
  On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f dans E si et seulement si :
  $\forall x\in X,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ /\ (\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow d[f_n(x) - f(x)] \leq \varepsilon$.
- Les inégalités "larges" sur n_0 ou sur $|f_n(x) - f(x)|$ dans les définitions de limite peuvent être remplacées par des inégalités "strictes".
- Pour une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut être amené à rechercher l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la suite (numérique) $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
  En particulier, on appelle intervalle de convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout intervalle J tel que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur J.

Propriété 1.9 Critère de Cauchy pour la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, il faut et il suffit que, pour tout x de I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire, $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ $n,m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Justification - Rappels 1.10

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Dans un espace métrique complet, toute suite de Cauchy est convergente.
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets.

Remarques 1.11

- On peut étendre cette propriété aux suites de fonctions à valeurs dans un espace métrique si et seulement si celui-ci est complet. Si l'espace n'est pas complet la condition de Cauchy est juste nécessaire mais pas suffisante. Cela signifie que, si elle n'est pas vérifiée, il n'y a pas convergence.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n$.
  Pour tout x de $[0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
  Donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_n(x)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x^n\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
  On ne peut pas intervertir les limites en cas de convergence simple.

Définition 1.12

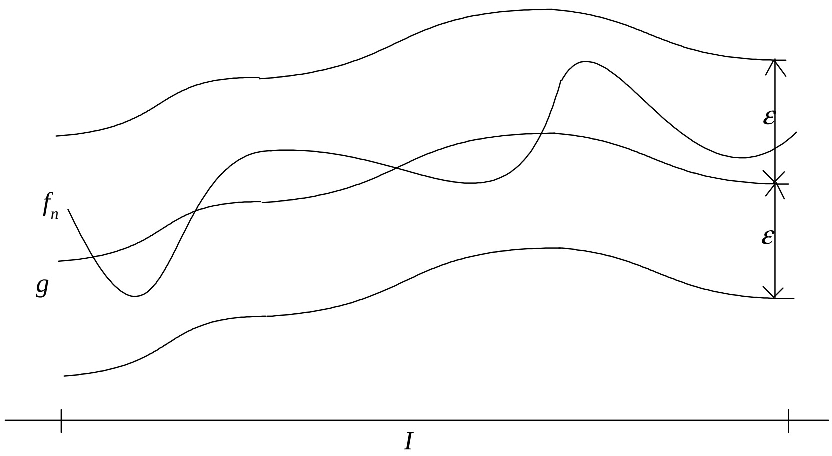
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans K.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I si et seulement si :

a. A partir d'un certain rang, $f_n - g\in\mathscr{B}(I,K)$
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n - g \|_\infty = 0$

Remarques 1.13

- Dire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I est la même chose que de dire que la suite (numérique) $(\sup_{x\in I}|f_n(x) - g(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est bien définie à partir d'un certain rang) converge vers 0.
- Avec les notations de la définition 1.12, on dit que g est la limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Toujours avec les mêmes notations, l'application g (définie sur I) doit vérifier :
  $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - g(x)\|_\infty \leq \varepsilon$
  ou encore $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in I}|f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$
  ou encore $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x\in I$
  ou encore $\forall\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $\forall x\in I$, $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.
  On remarquera que (à la différence de la convergence simple) l'entier n_0 dépend uniquement de ε.
  On remarquera aussi que les définitions de convergence simple et uniforme ne diffèrent parfois que dans l'ordre des termes.
- Puisque $|f_n(x) - g(x)| = |(f_n - g)(x)|$, pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I, on peut prouver que la suite $(f_n - g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I, alors elle converge simplement vers g sur I.
  Nous verrons que la réciproques est fausse.

- Interprétation graphique :



- On peut définir de façon similaire la convergence uniforme lorsque l'on considère une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique.
  Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans E où X est un ensemble et (E,d) un espace métrique.
  On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur X si et seulement si :
  $\forall\varepsilon > 0, \exists\, n_0\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \sup_{x\in X} d[f_n(x) - g(x)] < \varepsilon$.

Propriété 1.14

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, il suffit qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ telle que, pour tout entier n, $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$.

Justification

Il s'agit de la règle de comparaison des suites positives.

Exemples 1.15

- Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n+\cos nx}$ (pour $n \geq 2$).
  Nous avons vu, dans l'exemple 1.7, que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
  Puisque $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| \leq \dfrac{1}{n-1}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = 0$.
  La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
- Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+nx^2}$.
  Nous avons vu, dans l'exemple 1.7, que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Or, si $0 < x < \dfrac{1}{n}$, on a $-nx > -1$ et $1 + nx^2 < 1 + \dfrac{1}{n} \leq 2$.
  C'est-à-dire $e^{-nx} > \dfrac{1}{e}$ et $\dfrac{1}{1+nx^2} > \dfrac{1}{2}$. D'où $\dfrac{e^{-nx}}{1+nx^2} > \dfrac{1}{2e}$.
  Donc, $\sup_{x\geq 0}|g_n(x) - g(x)| \geq \sup_{x\in]0,\frac{1}{n}[}|g_n(x) - g(x)| > \dfrac{1}{2e}$.
  La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction g sur $\mathbb{R}_+$.
  Toutefois, si l'on considère la restriction des (g_n) à un intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$, on a $\sup_{x\geq a}|g_n(x)| = g_n(a) = \dfrac{e^{-na}}{1+na^2} = \dfrac{1}{e^{na}(1+na^2)}$. On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup_{x\geq a}|g_n(x) - g(x)| = 0$.
  La suite des $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a,+\infty[$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Remarque 1.16

La propriété 1.14 est en particulier utilisable et intéressante pour $\alpha_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ lorsque l'on peut calculer cette borne supérieure.
En pratique, ce calcul peut se faire par l'étude des variations de $|f_n - f|$ ou de $f_n - f$.

Exemple 1.17

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $h_n(x) = xe^{-nx} = \frac{x}{e^{nx}}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, la suite $(h_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (numérique) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction nulle.
Pour tout entier non nul n, la fonction $h_n - 0 = h_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et
$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $h'_n(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1 - nx)e^{-nx}$.
La fonction h_n est donc croissante sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ ($n \neq 0$) puis décroissante sur $\left[\frac{1}{n}; +\infty\right[$.
Puisque h_n est positive (car elle est définie sur $\mathbb{R}_+$), on a $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|h_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} h_n(x) = h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$.
La suite (numérique) $\left(\frac{1}{ne}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 1.18

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f.
Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I, il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$.

Justification

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$, puisque $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$, la suite $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ ne peut donc tendre vers 0.

Exemples 1.19

- On aurait pu utiliser cette propriété pour montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des exemples 1.7 et 1.15 ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
  En effet, en prenant $x_n = \frac{1}{n}$, on a $g_n(x_n) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$.
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|g_n(x_n) - g(x_n)| = \frac{1}{e}$.
- Soit $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $i_n(x) = \frac{\sin nx}{1 + n^2x^2}$.
  Pour tout réel x, on a $|i_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2x^2}$ et donc la suite (numérique) $(i_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
  La suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction nulle.
  Or, si on considère la suite (numérique) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $x_n = \frac{\pi}{2n}$, on a $|i_n(x_n) - 0(x_n)| = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}}$.
  La convergence n'est donc pas uniforme.

Remarque 1.20

On a pu dans les exemples précédent évaluer exactement $|f_n(x_n) - f(x_n)|$.
Toutefois, une simple minoration par un nombre strictement positif suffit.

Définition 1.21

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans K.
Soit J un sous-intervalle de I.

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur J si la suite des restrictions des f_n à J est simplement convergente.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur J si la suite des restrictions des f_n à J est uniformément convergente.
- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur tout segment de I si, pour tout intervalle fermé $[a,b]$ inclus dans I, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.

Remarques 1.22

- On définit de la même façon la convergence uniforme sur tout intervalle borné de I.
- La convergence uniforme n'a de sens que si l'on précise sur quel ensemble on a cette convergence.
- Dans la pratique, on commence par vérifier si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I, vers une fonction g. On vérifie ensuite si la convergence est uniforme sur I.
  Dans le cas où il n'y a pas de convergence uniforme sur I tout entier, on peut rechercher si ce n'est pas le cas sur certains sous-intervalles J de I.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I, elle converge uniformément vers g sur tout segment de I. La réciproque est fausse.
- Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I (resp. sur tout intervalle borné de I), elle converge simplement vers g.
  En effet, tout élément de I appartient à un segment de I (resp. à un intervalle borné de I), donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Propriété 1.23 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans K.
La suite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I si et seulement si :
$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n,m\in\mathbb{N})\ m,n \geq N \Rightarrow \forall x\in I, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Remarques 1.24

- Il existe bien d'autres façons d'exprimer cette propriété :
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n,m\in\mathbb{N})\ \forall x\in I,\ m,n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n,m\in\mathbb{N})\ m,n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, \forall m,n \geq N$
    a. $f_m - f_n \in \mathscr{B}(I,K)$
    b. $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ \forall p\in\mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \forall x\in I, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ \forall x\in I, \forall p\in\mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ \forall p\in\mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I}|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.
  - # $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ \forall p\in\mathbb{N},\ n \geq N$
    a. $f_{n+p} - f_n \in \mathscr{B}(I,K)$.
    b. $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$.
- De la même façon que pour le critère de Cauchy de la convergence simple, on peut étendre cette propriété aux suites de fonctions à valeurs dans un espace métrique si et seulement si celui-ci est complet.
  La condition de Cauchy n'est pas une condition suffisante de convergence dans les e.v.n. non complets.

Démonstration

($\Rightarrow$) Puisque, pour tout x de I, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|$, on en déduit que :

$$\sup_{x\in I}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in I}|f_m(x) - f(x)| + \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|.$$

Si la convergence est uniforme, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel que :

$$m \geq N \;\Rightarrow\; \sup_{x\in I}|f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et $$n \geq N \;\Rightarrow\; \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc : $m,n \geq N \;\Rightarrow\; \sup_{x\in I}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout x de I, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x)| = \lim\limits_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$.

Donc $$\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I}|f_n(x) - \lim_{m\to+\infty} f_m(x)|$$
$$= \sup_{x\in I} \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$
$$= \lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f_m(x)|.$$

On peut donc trouver, pour tout réel $\varepsilon > 0$, un entier N tel que $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

1.3 Propriétés des suites de fonctions convergentes

Propriété 1.25

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I ($\subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.
Pour tout entier n, soient g_n et h_n les fonctions (réelles) définies par $g_n = \mathrm{Re}(f_n)$ et $h_n = \mathrm{Im}(f_n)$.
Soient g et h les fonctions (réelles) définies par $f = g + i\,h$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si et seulement si les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement respectivement vers g et h.

Remarque 1.26

On a un résultat identique en termes de convergence uniforme et en termes de convergence uniforme sur tout segment :
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers g et h.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers f si et seulement si les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur tout segment respectivement vers g et h.

Propriété 1.27

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K qui converge uniformément vers g sur I.
Soit a un élément adhérent à I.
On suppose que, pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n$ et que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément λ de K.
Alors la fonction g admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.

Remarques 1.28

- On peut exprimer ce résultat en écrivant :
$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$
Ce que l'on nomme l'"interversion des limites".
- On peut montrer que l'hypothèse que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément λ de K est, en fin de compte, une conséquence des autres hypothèses.

Démonstration

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_1\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon\ \ \forall x\in I$.
$\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \,/\, (\forall x\in I)\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - \lambda_n| \leq \varepsilon$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_2\in\mathbb{N} \,/\, (\forall n\in\mathbb{N})\ n \geq n_2 \Rightarrow |\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$.

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{3}$ et en prenant $N = \sup(n_1,n_2)$, on obtient en particulier que :
$|f_N(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|f_N(x) - \lambda_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\lambda_N - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc, $\forall \varepsilon>0$, ($\exists N\in\mathbb{N}$ et) $\exists \eta>0 \,/\, (\forall x\in I)\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow$

$$\begin{aligned}|g(x) - \lambda| &\leq |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \lambda_N| + |\lambda_N - \lambda| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

L'entier N n'intervient pas dans la conclusion et ne sert que dans les étapes intermédiaires.

Corollaire 1.29

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K qui converge uniformément vers f sur I.
- Si toutes les fonctions f_n sont continues en un point a de I, alors la limite f est continue en a.
- Si toutes les fonctions f_n sont continues sur I et alors f est continue sur I.

Démonstration

D'après la propriété 1.27, on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = f(a)$.

Remarques 1.30

- On a des propriétés similaires :
  1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K qui converge uniformément vers f sur tout intervalle borné de I. Si les fonctions f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.
  2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K qui converge uniformément vers f sur tout segment de I. Si toutes les fonctions f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I.

  Ces propriétés découlent directement de :
  f continue sur $I \Leftrightarrow f$ continue sur tout intervalle borné de $I \Leftrightarrow f$ continue sur tout segment de I.
  En effet, pour tout x_0 de I, on peut trouver un segment x_0 ou un intervalle borné de I, qui contient x_0. De plus, si x_0 est l'une des extrémités de I, la continuité correspond à une continuité à droite ou à gauche.
- Le corollaire 1.29 est parfois utilisée pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, si les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues en un point a, mais si f n'est pas continue en a, alors il n'y a pas convergence uniforme.
  C'est le cas, par exemple, de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vue dans les exemples 1.7, 1.15 et 1.19.
  Pour tout entier n, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qui n'est pas le cas de la limite qui n'est pas continue en 0.
- Attention, même si on n'a pas de convergence uniforme, la limite d'une suite de fonctions continues peut être continue.
  C'est le cas par exemple de la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans l'exemple 1.19.
  Toutefois la convergence uniforme est nécessaire pour que la limite d'une suite de fonctions continues soit continue dans le cas où I est un compact de $\mathbb{R}$ (Théorème de Dini).
- On peut étendre le corollaire 1.29 aux suites de fonctions de X dans E où X est un espace topologique et E est un espace métrique.

Propriété 1.31

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit x_0 un élément de $[a,b]$.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[a,b]$ par $F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Soit F la fonction définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers F sur $[a,b]$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, il existe un entier n_0 tel que
$n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Si $x \geq x_0$, $\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_0}^{x}|f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon(x - x_0) \leq \varepsilon(b - a)$.

Si $x \leq x_0$, $\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x}^{x_0}|f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon(x_0 - x) \leq \varepsilon(b - a)$.

Donc, pour $n \geq n_0$, $\sup_{x\in[a,b]}\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon(b - a)$.

Puisque $b - a$ est une constante, cela signifie bien (moyennant un changement de variable sur ε) la convergence uniforme des $\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarques 1.32

- Pour tout entier n, l'application $F_n : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f_n qui s'annule en x_0.

  De même, $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en x_0.
- On ne pas prendre n'importe quelle primitive de chacun des f_n. En effet, celles-ci sont définies à une constantes près. Si l'on considère $F_n + \lambda_n$ avec λ_n quelconque (par exemple $\lambda_n = n$), il n'y a aucune raison que ces primitives des f_n converge vers une fonction F.

Corollaire 1.33

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans K.
Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors la suite numérique $\left(\int_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 1.34

On peut écrire la propriété 1.31 : $\lim_{n\to+\infty} \int_{a}^{b} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 1.35

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur [0;1] par $f_n(x) = x^n(1-x)^n$.
On a $f_1(x) = x(1-x) = x - x^2$.
La fonction f_1 est dérivable sur [0;1] et, $\forall x\in[0;1]$, $f'_1(x) = 1 - 2x$.
La fonction f_1 est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.
Donc, $\forall x\in[0;1]$, $f_1(x) \leq f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
Or , $\forall x\in[0;1]$, $f_n(x) = (f_1(x))^n \leq \frac{1}{4^n}$.
Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur [0;1].
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Remarque 1.36

On peut logiquement se poser la question de la dérivation de la limite d'une suite de fonctions dérivables.
Nous allons voir que la convergence uniforme n'est pas suffisante.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ (pour $n \geq 1$).
Pour tout entier non nul n, $x^2 + \frac{1}{n^2}$ est toujours strictement positif (ne s'annule jamais) et donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = |x|$.
Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Vérifions que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.
(rappel : $\forall a,b \geq 0$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$)
On a : $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{\frac{1}{n^2}}$
$\Rightarrow \quad |x| < \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \quad 0 < \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \quad 0 < \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| \leq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \qquad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Or, la fonction f (valeur absolue) qui est la limite (uniforme) de la suite n'est pas dérivable en 0.

Propriété 1.37

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I.
On suppose que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur tout intervalle borné de I et qu'il existe x_0 dans I tel que la suite numérique $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
Alors :
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle borné de I, vers une fonction f.
La fonction f est dérivable sur I et vérifie $f' = g$ c'est-à-dire $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$.

Remarque 1.38

Si, de plus, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
En effet, puisque la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur tout intervalle borné de I, si les $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur I, il en est de même de la limite.

Démonstration

1ère étape : Soit A un intervalle borné de I.
Nous voulons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f.

On pose $a = |A| = \sup A - \inf A$. On a donc $a = \sup \{d(x,y) = |x - y| \text{ où } x,y\in A\}$

Nous allons montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy de la convergence uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite des (f'_n) converge uniformément vers g sur A, il existe un entier n_1 tel que
$n,m \geq n_1 \Rightarrow \sup_{x\in A}|f'_n(x) - f'_m(x)| \leq \varepsilon$
C'est-à-dire : $\sup_{x\in A}|(f'_n - f'_m)(x)| \leq \varepsilon$ ou encore $\sup_A|(f_n - f_m)'(x)| \leq \varepsilon$
La fonction $f_n - f_m$ est dérivable sur A.
D'après le théorème des accroissements finis, $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| \leq \sup_{x\in A}|(f_n - f_m)'(x)| \times |x - x_0|$.
C'est-à-dire : $|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| \leq \varepsilon \times a$.

Moyennant un changement de variable sur ε, on peut trouver un entier n_2 tel que :
$$n,m \geq n_2 \Rightarrow |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, $\forall x\in A$,
$$\begin{aligned}|(f_n - f_m)(x)| &= |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0) + (f_n - f_m)(x_0)| \\ &\leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + |(f_n - f_m)(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.\end{aligned}$$

Enfin, puisque la suite (numérique) $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'un espace métrique complet, c'est une suite de Cauchy.
Donc il existe un entier n_3 tel que : $n,m \geq n_3 \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon$
Moyennant un changement de variable sur ε, on peut trouver un entier n_4 tel que :
$$n,m \geq n_4 \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant maintenant $n_0 = \sup(n_2,n_4)$, on obtient : $n,m \geq n_0 \Rightarrow |(f_n - f_m)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x\in A$.

2ème étape : Soit x_1 un élément quelconque de I. Nous voulons montrer que $f'(x_1) = g(x_1)$.

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par $\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1} \text{ si } x \neq x_1 \\ f_n'(x_1) \text{ si } x = x_1 \end{cases}$.
Puisque, pour tout entier n, f_n est continue sur I, ($x \mapsto x - x_1$ ne s'annulant pas $I \setminus \{x_1\}$) chaque φ_n est continue sur $I \setminus \{x_1\}$.
Puisque, pour tout entier n, f_n est dérivable en x_1, chaque φ_n est continue en x_1.
$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de fonctions continues sur I.
La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \text{ si } x \neq x_1 \\ g(x_1) \text{ si } x = x_1 \end{cases}$
Nous allons montrer que la convergence est uniforme sur I.

Ce qui signifiera que ϕ est continue en x_1.

On aura donc bien $g(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(x_1)$.

Soit m et n deux entiers.
Si $x \neq x_1$, $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = \left|\dfrac{f_m(x)-f_m(x_1)}{x-x_1} - \dfrac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}\right| = \dfrac{|(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(x_1)|}{|x-x_1|}$.

Rappel : théorème des accroissements finis
Si h est une fonction continue $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors
$\left|\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}\right| \leq \sup_{t\in]a,b[} h'(t)$.

Donc, pour $x \neq x_1$, $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \leq \sup_{t\in I}|(f'_m - f'_n)(t)|$. De plus, $|\varphi_m(x_1) - \varphi_n(x_1)| = 0$.
Donc, pour tout x de I, on a $\sup_{x\in I}|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| \leq \sup_{t\in I}|(f'_m - f'_n)(t)|$.
Puisque la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy de convergence uniforme.

Il existe de nombreuses variantes à la propriété 1.37. Les plus utilisées sont les suivantes :

Corollaire 1.39

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I.
On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I et que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur I.
Alors la fonction f est dérivable sur I et vérifie $f' = g$ c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n$.

Corollaire 1.40

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que les (f_n) sont continûment dérivables sur $[a,b]$.
Si la suite des (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si la suite des (f_n') converge uniformément vers g sur $[a,b]$, alors f est continûment dérivable sur $[a,b]$ et $f' = g$.

2. Séries de fonctions

Définitions 2.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout entier naturel p, on définit s_p la (fonction) somme partielle d'ordre p des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$\forall x\in I$, $s_p(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + ... + u_p(x) = \sum_{i=0}^{p} u_i(x)$ c'est-à-dire $s_p = \sum_{i=0}^{p} u_i$.
La série de fonctions de terme général u_n notée $\sum u_n$ est la suite de fonctions de terme général s_n.

Exemple 2.2

$\forall n\in\mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = e^{-nx}$.
$\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $s_p(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + ... + e^{-px} = \dfrac{1-(e^{-x})^{p+1}}{1-e^{-x}}$.
La suite de terme général s_n c'est-à-dire la série $\sum u_n$ converge vers la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-e^{-x}}$.

Remarques 2.3

Nous allons au cours de l'étude des séries de fonctions aborder cinq types de convergence. Certaines convergences seront similaires aux suites de fonctions : il s'agit de la convergence simple (CVS) et de la convergence uniforme (CVU). D'autres seront spécifiques aux séries de fonctions : il s'agit de la convergence absolue simple (CVAS), de la convergence absolue uniforme (CVAU) et de la convergence normale (CVN).

Bon nombre des propriétés de cette partie sont des corollaires de propriétés sur les séries numériques et/ou sur les suites de fonctions. En effet, l'étude d'une série de fonctions peut-être dans un premier temps vu comme l'étude de la suite des sommes partielles des fonctions. De plus, lorsque l'on fixe le réel x, l'étude de la série de fonction de terme général f_n en x est l'étude d'une série numérique.

Définition 2.4

Avec les notations de la définition 2.1.
On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement (CVS) sur I si et seulement si la suite de fonctions de terme général s_n converge simplement sur I.
On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément (CVU) sur I si et seulement si la suite de fonctions de terme général s_n converge uniformément sur I.

Remarques 2.5

- Toujours avec les notations précédentes, on a :
  - \# La série $\sum u_n$ converge simplement vers s sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - s(x)| \leq \varepsilon$.
  - \# La série $\sum u_n$ converge uniformément vers s sur I si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon$.
- Lorsque l'on parle de convergence uniforme, il est important de préciser sur quel ensemble a lieu cette convergence.
- Par abus et surtout dans la pratique, on parle de la série $\sum u_n(x)$ au lieu de la série $\sum u_n$ afin de différencier les séries de fonctions des séries numériques.
- On note alors $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ la (fonction) somme de la série c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.
- Si $f = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$, on dit que l'on a un développement en série de f.
- Une série de fonctions uniformément convergente sur J est simplement convergente sur J.
- Si la série $\sum u_n(x)$ est simplement (resp. uniformément) convergente sur J, alors la suite de terme général $u_n(x)$ converge simplement (resp. uniformément) sur I vers la fonction nulle.
- Puisque l'on sait définir la convergence d'une suite de fonctions à valeurs dans un e.v.n., on sait donc faire de même pour les séries de fonctions.
- De même que pour les suites et séries numériques, il est possible que la série de fonctions ne commence pas à l'ordre 0. Dans le même ordre d'idée, on peut modifier un nombre fini de termes d'une série de fonctions sans en changer sa nature.

Exemples 2.6

- La série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n+x}$ ne converge pour aucun réel x.
  En effet, pour x fixé, on a $u_n(x) \sim_\infty \dfrac{1}{n}$ qui est une série divergente.
- La série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$ converge simplement sur $]1;+\infty[$.
  C'est un résultat sur les séries numériques.
  (De plus, cette série ne converge pas uniformément sur $]1;+\infty[$ mais sur tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où a est un réel vérifiant $a > 1$).
- La série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2x^2}$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$ vers la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6x^2}$.
  En effet, pour x fixé, la suite numérique de terme général $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2x^2} = \dfrac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ converge simplement vers f.

De plus, $\sup_{x\in[1;+\infty[} |s_n(x) - s(x)| = \sup_{x\in[1;+\infty[} \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2x^2} - \frac{\pi^2}{6x^2}\right|$

$$= \sup_{x\in[1;+\infty[} \left|\frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right|$$
$$= \sup_{x\in[1;+\infty[} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \times \sup_{x\in[1;+\infty[} \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$, on en déduit que la suite de terme général $\sup_{x\in I} |s_n(x) - s(x)|$ tend vers 0 sur $[1;+\infty[$.

Définition 2.7

Toujours avec les mêmes notations, si la série de terme général $u_n(x)$ converge, pour tout entier p, on appelle reste partiel d'ordre p la fonction définie sur I par $R_p(x) = \sum_{n\geq p+1} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{n} u_k(x)$.

Remarques 2.8

- Le reste partiel n'existe qu'en cas de convergence.
- On a donc : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in I$, $\sum_{n\geq 0} u_p(x) = s_p(x) + R_p(x)$.
- Par définition, si la série de terme général $u_n(x)$ converge simplement (resp. uniformément), la suite de terme général $R_n(x)$ converge simplement (resp. uniformément) vers la fonction nulle.

Propriété 2.9 Critère de Cauchy

Soit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- La série de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur I si et seulement si :
  $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ $n \geq m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$.
- La série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur I si et seulement si :
  $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ $n \geq m \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I}\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$.

Remarques 2.10

- Le critère de Cauchy de convergence simple peut se traduire aussi par :
  $\forall x\in I$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \varepsilon \ \ \forall p\in\mathbb{N}$.
- Le critère de Cauchy de convergence uniforme peut se traduire aussi par :

  $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ $n \geq m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| \leq \varepsilon \ \ \forall x\in I$

  ou $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $\forall x\in I$, $(\forall n,m\in\mathbb{N})$ $n \geq m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$

  ou $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \varepsilon \ \ \forall p\in\mathbb{N}$

  ou $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $(\forall n\in\mathbb{N})$ $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \varepsilon \ \ \forall x\in I$, $\forall p\in\mathbb{N}$

  ou $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ / $\forall x\in I$, $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\forall p\in\mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$.

Définitions 2.11

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n(x)$ de I dans K est absolument simplement convergente (CVAS) sur I si, pour tout x de I, la série numérique $\sum|f_n(x)|$ est convergente dans $\mathbb{R}_+$.
On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ de I dans K est absolument uniformément convergente (CVAU) sur I si la série de fonctions de terme général $|f_n(x)|$ est uniformément convergente sur I.

Remarque 2.12

On étend ces définitions aux séries de fonctions à valeurs dans un e.v.n. en considérant $\|f_n(x)\|$ au lieu de $|f_n(x)|$.

Exemples 2.13

- Soit la série de terme général défini sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ $(n \geq 1)$.
  $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $0 < \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$ donc la suite de terme général $\frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant.
  D'après le théorème des séries alternées, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
  Donc la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
  Mais, $\forall x\in\mathbb{R}_+$, la série de terme général $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ ne converge pas (voir exemple 2.5).
- Soit la série de terme général $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ $(n \geq 1)$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
  $\forall n,m\in\mathbb{N}$ / $n \geq m$, on a $\sum_{k=m}^{n}|f_k(x)| = \sum_{k=m}^{n}\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| = \sum_{k=m}^{n}\frac{|\sin kx|}{k^2} \leq \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}_+$.
  Puisque la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, elle est de Cauchy.
  On peut donc trouver un entier N tel que $n \geq m \geq N \Rightarrow \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=m}^{n}|f_k(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x\in\mathbb{R}_+$.
  La série de fonctions de terme général $|f_n(x)|$ vérifie le critère de convergence uniforme de Cauchy. Donc la série de terme général $\frac{\sin nx}{n^2}$ $(n \geq 1)$ converge absolument uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 2.14

Une série de fonctions absolument simplement convergente est simplement convergente.
Une série de fonctions absolument uniformément convergente est uniformément convergente.

Justification

Pour tout x, on a $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p}|u_k(x)|$. Donc $\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sup_{x\in I}\left(\sum_{k=n}^{n}|u_k(x)|\right)$. Le critère de Cauchy, s'il est vérifié pour la série de terme général $|u_n|$, l'est aussi pour la série de terme général u_n.

Définition 2.15

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans K.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
Si la série (numérique) de terme général α_n converge et si, pour tout entier n et pour tout x de I, on a $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, on dit que la série $\sum f_n(x)$ est normalement convergente (CVN).

Remarque 2.16

La série $\sum f_n(x)$ est normalement convergente si et seulement si la série (numérique) $\sum\|f_n(x)\|_\infty$ est convergente.

Propriété 2.17

Une série normalement convergente est uniformément convergente et est absolument convergente.

Démonstration

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que, tout entier n et pour tout x de I, il existe un réel positif α_n tel que $|f_n(x)| \leq \alpha_n$.
De plus, on suppose que la série de terme général α_n converge (i.e. $\sum \alpha_n < \infty$).
On a donc, $\forall n,m \in \mathbb{N} \ / \ n \geq m$ $\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \sup_{x\in I} \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} \sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^{n} \alpha_k$.
Puisque la série $\sum \alpha_n$ est convergente, elle est de Cauchy.
On peut donc trouver un entier N tel que $n \geq m \geq N \ \Rightarrow \ \sum_{k=m}^{n} \alpha_k \leq \varepsilon \ \Rightarrow \ \sup_{x\in I} \left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$.
La série de fonctions de terme général $|f_n(x)|$ vérifie le critère de convergence uniforme de Cauchy.

Exemple 2.18

La série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ (pour $n \geq 1$) converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
En effet, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$
Donc la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarques 2.19

- On a donc CVN $\Rightarrow$ CVAU $\Rightarrow$ CVU et CVN $\Rightarrow$ CVAS $\Rightarrow$ CVS.
  Toutes les réciproques de ces implications sont fausses.
  De plus, il n'y a aucune implication en général entre CVU et CVAS.
- Soit J un intervalle de I.
  On parle de même que pour les suites de fonctions, de convergence simple, uniforme sur J ou sur tout segment de J.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I ($\subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$
  Pour tout entier n, soient g_n et h_n les fonctions (réelles) définies par $g_n = \mathrm{Re}(f_n)$ et $h_n = \mathrm{Im}(f_n)$.
  Soient g et h les fonctions (réelles) définies par $f = g + i\,h$.
  La série $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément, absolument ou normalement) vers f si et seulement si les séries de terme général $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement (resp. uniformément, absolument ou normalement) vers g et h.

Propriété 2.20

Soient $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans K.
Soient α et β deux éléments de K.
Si les séries $\sum u_n(x)$ et $\sum v_n(x)$ convergent simplement, uniformément, absolument ou normalement alors il en est de même de la série $\sum[\alpha\, u_n(x) + \beta\, v_n(x)]$.
On a alors, pour tout x de I, $\sum_{n\geq 0}[\alpha\, u_n(x) + \beta\, v_n(x)] = \alpha \sum_{n\geq 0} u_n(x) + \beta \sum_{n\geq 0} v_n(x)$.

Propriété 2.21

Soit la série de terme général $f_n(x)$ qui converge uniformément sur $J \subset I$ vers une fonction f.
Si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in J$ alors f est continue en x_0.
Si toutes les fonctions f_n sont continues sur J alors f est continue sur J.

Remarques 2.22

- On a donc (en cas de convergence uniforme) : $\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right] = \sum_{n\geq 0}\left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right]$.
- Cette propriété est aussi utilisée pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.
  Par exemple, soit la série de terme général $u_n(x) = \sin^2 x\,(\cos x)^n$ définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ pour $n \geq 1$.
  Pour tout entier n, la fonction u_n est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
  Pour tout entier n, on a $u_n(0) = 0$.
  Donc $\sum_{n\geq 1} u_n(0) = 0$.
  Pour tout $x \neq 0$ et pour tout entier n, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2 x\,(\cos x)^k = \sin^2 x \sum_{k=1}^{n} (\cos x)^k$
  D'où $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sin^2 x\left(\sum_{k=0}^{n}(\cos x)^k - 1\right) = \sin^2 x\left(\frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x} - 1\right)$.
  Et donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sin^2 x\left(\frac{1}{1-\cos x} - 1\right) = \frac{\sin^2 x \cos x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos^2 x)\cos x}{1-\cos x} = (1+\cos x)\cos x$.
  La série de terme général $u_n(x)$ converge vers la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos x + \cos^2 x$ si $x \neq 0$.
  Mais $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 2$. Donc f n'est pas continue.

Propriété 2.23

Soit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors pour tous les réels x et x_0 de $[a,b]$ la suite des primitives $\left(\sum_{k=0}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 2.24

Cela signifie que (en cas de convergence uniforme) : $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$.
On peut donc intervertir la sommation et l'intégration.

Corollaire 2.25

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$.
On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f.
Alors la série numérique $\sum \left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire, $\sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 2.26

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans K, dérivables sur I vérifiant :

1. Il existe au moins un x_0 de I tel que la série (numérique) de terme général $f_n(x_0)$ converge.
2. La série de fonctions $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle borné de I.

Alors :
La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle borné de I.
La somme de la série $\sum f_n$ est dérivable sur I et, sur tout l'intervalle borné I, on a l'égalité : $(\sum_{n\geq 0} f_n)' = \sum_{n\geq 0} f'_n$.

Exemple 2.27

Soit $r \in]0;1[$ et soit $I =]-r;r[$.
On considère la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ définie sur I.
Pour tout entier n, la fonction u_n est dérivable et $u'_n(x) = x^n$.
La série $\sum u'_n$ est la suite de terme général $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ qui converge normalement (et donc uniformément) sur I vers $\dfrac{1}{1-x}$.
En effet, on a $\sup_{x\in]-r;r[} |x^n| = r^n$ qui est le terme général d'une série convergente.
La série numérique de terme général $u_n(0)$ est la suite nulle. Elle est donc convergente.

On en déduit que la série $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ converge sur I vers la primitive de $\dfrac{1}{1-x}$ qui s'annule en 0 c'est-à-dire $-\ln(1-x)$.

Remarques 2.28

- Si la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions classe $\mathscr{C}^1$ sur I, il en est de même de la somme de la série $\sum u_n$.
- Cette propriété découle directement de la propriété 1.37 en considérant la suite des sommes partielles.
- En particulier, on peut trouver différentes "variantes" de cette propriété.

Corollaire 2.29

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On suppose que les (u_n) sont continûment dérivables sur $[a,b]$.
Si la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et si la série de terme général $u_n'(x)$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$, alors f est continûment dérivable sur $[a,b]$ et $f' = g$.