Séries numériques à termes réels ou complexes

Dans tout ce chapitre, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Préliminaires

Définition 1.1

Une suite u d'éléments d'un ensemble F est une application de $\mathbb{N}$ dans F.
Pour tout entier n, on note alors $u(n)$ par u_n.

Remarques 1.2

- On peut noter la suite u par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $(u_n)_{n\geq 0}$ ou simplement par (u_n).
- On dit aussi que u est la suite de terme général u_n.
- Dans le cas où u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans F définie pour $n \geq N$, on parle de suite définie à partir du rang N et on note $(u_n)_{n\geq N}$.

Définition 1.3

Une suite numérique est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

Définition 1.4

Une suite numérique u converge vers $l\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0\in\mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

Remarques 1.5

- La définition de limite est similaire si l'on considère les suites définies à partir d'un certain rang.
- En cas d'existence d'une limite, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou simplement $u_n \to l$.
- La limite, si elle existe, est unique.
- Une suite u qui converge vers l vérifie : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = l + \varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
- Dans la définition, les sigles "| ... |" correspondent au module
(identique à la valeur absolue sur $\mathbb{R}$).
- Dans le cas d'une suite numérique réelle v, on dit que v tend vers $+\infty$ si et seulement si :
$\forall A > 0, \exists\, n_0\in\mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow v_n > A$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, ou plus simplement $v_n \longrightarrow +\infty$.
- On définit de manière similaire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ par : $\forall A < 0, \exists\, n_0\in\mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow v_n < A$.

Propriété 1.6

Une suite numérique convergente est bornée.

Propriété 1.7

Soit u une suite réelle croissante (respectivement décroissante).
Si u est bornée alors u converge.
Si u n'est pas bornée alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Remarque 1.8

Les résultats sont identiques si la monotonie n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Propriété 1.9

Une suite complexe u de terme général $u_n = a_n + ib_n$ (où a_n et b_n sont des réels) est convergente si seulement si les suites réelles de terme général respectif a_n et b_n sont convergentes.

Définition 1.10

On dit qu'une suite numérique u est une suite de Cauchy si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ / $(n \geq n_0$ et $p \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_p| < \varepsilon$.

Théorème 1.11

Pour qu'une suite numérique soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.

Rappel 1.12

Les espaces $\mathbb{R}^n$ sont des espaces métriques complets.

Propriété 1.13

Une sous-suite d'une suite numérique convergente est convergente de même limite.

Propriété 1.14

De toute suite numérique bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Propriété 1.15

La somme $s_{n-1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ des n premiers termes d'une suite arithmétique u de raison r $(\in\mathbb{C})$ et de premier terme u_0 $(\in\mathbb{C})$ est $s_{n-1} = n.u_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}r = \dfrac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$.

Propriété 1.16

La somme $s_{n-1} = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ des n premiers termes d'une suite géométrique u de raison q ($\in\mathbb{C}$) et de premier terme u_0 ($\in\mathbb{C}$) est :

- Si $q \neq 1$, $s_{n-1} = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = u_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
- Si $q = 1$, $s_{n-1} = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = n.u_0$.

Remarques 1.17

- Dans le cas où $q = -1$ et $u_0 = 1$, on a :
  $s_n = 1 + (-1) + 1 + ... + (-1)^n = 0$ si n est pair
  $= 1$ si n est impair.
- Plus généralement, la somme de n termes consécutifs (dont le premier est d'ordre p) d'une suite géométrique u de raison $q \neq 1$ est $\sum_{k=p}^{p+n-1} u_k = u_p \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. Définitions de base

Définition 2.1

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de K. Soit N un entier naturel.
On appelle somme partielle d'indice N ou d'ordre N des (u_n) la quantité $s_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ c'est-à-dire la somme des $N+1$ premiers termes de la suite u .

Définition 2.2

On appelle série de terme général u_n la suite de terme général $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ $(= u_0 + u_1 + ... + u_n)$.

Exemple 2.3

La série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ est la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n+1}$ c'est à dire
$1\ ;\ 1+\dfrac{1}{2}\ ;\ \ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ ;\ ......\ ;\ 1+\dfrac{1}{2}+....+\dfrac{1}{n+1}\ ;\ ....$

Remarques 2.4

- Nous pourrons considérer des séries dont le premier terme est d'ordre $n_0 \geq 1$. Par exemple, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ ne peut pas commencer à l'ordre 0.
  Cette série est la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ c'est-à-dire
  $1\ ;\ 1+\dfrac{1}{2^2}\ ;\ \ 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\ ;\ ......\ ;\ 1+\dfrac{1}{2^2}+....+\dfrac{1}{n^2}\ ;\ 1+\dfrac{1}{2^2}+....+\dfrac{1}{(n+1)^2}\ ;\ ....$
- On parle aussi de la série $\sum u_n$ pour désigner la série de terme général u_n.
- Avec les notations précédentes sur les sommes partielles, on a $u_0 = s_0$ et, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = s_n - s_{n-1}$.
  La suite u est donc entièrement déterminée par la suite s des sommes partielles.
  Autrement dit, toute suite v peut être considérée comme la série de terme général $v_n - v_{n-1}$.

Définition 2.5

On dit que la série $\sum u_n$ est convergente (ou qu'elle converge) si et seulement si la suite s des sommes partielles est convergente. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente (ou qu'elle diverge). Si la série est convergente, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{n\geq 0} u_n = S = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.
Cette limite est appelée la somme de la série $\sum u_n$.
En cas de convergence, on appelle reste partiel d'ordre n le scalaire $R_n = S - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{k\geq n+1} u_k$.

Remarques 2.6

- La convergence de la série $\sum u_n$ vers S signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - S\right| < \varepsilon$
  $\Rightarrow |R_n| < \varepsilon$.
- Par définition de la convergence d'une série, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.
  Mais on ne doit pas dire qu'une série est convergente si et seulement si son reste d'indice N tend vers 0, car l'existence même de ce reste suppose déjà que la série est convergente.
- Soit n un entier naturel et p un entier naturel non nul et soit $S_n^p = \sum\limits_{k=n+1}^{p} u_k$.
  La série de terme général u_n converge si et seulement si, pour tout entier n, la suite $(S_n^p)_{p\geq 0}$ admet une limite finie quand p tend vers l'infini.
- Si la suite u d'éléments de K n'est définie que pour $n \geq n_0 \geq 1$, on peut utiliser les résultats sur les séries dont le premier terme est celui de rang 0 en posant $u_n = 0$ pour tout les entiers n compris entre 0 et $n_0 - 1$. En cas de convergence, la somme de la série est alors notée $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n\geq n_0} u_n$.
- L'unicité de la limite (si elle existe) d'une suite implique l'unicité de la somme d'une série convergente.
- Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.
  C'est un problème différent que de calculer la somme de cette série en cas de convergence.
- En cas de convergence, s_n peut être considéré comme une approximation de S et R_n peut fournir une évaluation de cette approximation.
- Si l'on considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ des chiffres qui compose le développement décimale de π (a_0 correspondant au chiffre des unités i.e. 3). On a donc $\pi = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{10^n}$.

Propriété 2.7

On ne modifie pas la nature (convergence ou divergence) d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes. En revanche, s'il y a convergence, on modifie en général la somme de cette série.

Démonstration

Soit $\sum u_n$ une série (de terme général u_n) et soit $\sum v_n$ la série obtenue à partir $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes.
Donc, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = v_n \Rightarrow u_n - v_n = 0$.
Soit $S_N = \sum\limits_{k=0}^{N} u_k$ et $T_N = \sum\limits_{k=0}^{N} v_k$.
La suite de terme général $S_n - T_n$ est stationnaire (donc convergente).
En effet, $\forall n \geq n_0$, $S_n - T_n = \left(\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right) - \left(\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} v_k$.
Si l'une des suites S ou T possède une limite finie, il en est de même de l'autre.

Exemples de séries et de convergence 2.8
(voir le cours 1ère année ou la suite du cours de cette année pour les preuves)

- *Série géométrique* :
  On considère la série $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{R}$. On prendra pour convention $0^0 = 1$.
  Pour tout entier n, $s_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$.
  $= n$ si $a = 1$.
  Si $a = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
  Si $|a| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-a}$.
  Si $a > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = +\infty$.
  Si $a = -1$, s_n prend successivement deux valeurs 0 et 1 et ne peut donc pas converger.
  Si $a < -1$, a^{n+1} n'a pas de limite.
  Pour conclure, on a donc $\sum\limits_{n\geq 0} a^n = \dfrac{1}{1-a}$ uniquement quand $|a| < 1$ et dans ce cas le reste d'ordre n est alors $R_n = \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$. On obtient un résultat identique lorsque $a \in \mathbb{C}$.
- *Série harmonique :*
  La série $\sum \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est divergente.
- *Série harmonique alternée :*
  La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$ est convergente, de somme $\ln 2$.
- *Série exponentielle :*
  La série $\sum \dfrac{1}{n!}$ est convergente de somme e.
- La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$ est convergente, de somme $\dfrac{\pi^2}{6}$.

3. Propriétés des séries convergentes

Propriété 3.1

La série complexe $\sum z_n$ est convergente si et seulement si les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ le sont.
On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

Démonstration

Voir cours analyse 2ème année 1er semestre sur les limites de suites (ou de fonctions) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}$ pouvant être identifier à $\mathbb{R}^2$).

Propriété 3.2

Si la série $\sum u_n$ est convergente alors la suite u converge vers 0.

Démonstration

Si la série $\sum u_n$ est convergente, les suites S_1 et S_2 de termes généraux respectifs $\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$ (pour $n \geq 0$) et $\sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i$ (pour $n \geq 1$) sont convergentes et tendent toutes les deux vers le même réel $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.
Donc $S_1 - S_2$ qui est la suite de terme général u_n converge vers 0.

Remarques 3.3

- La réciproque est fausse. Soit, par exemple la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
  On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Mais $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et
  $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = (\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + ... + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
  Donc $s_n = \sqrt{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$
- De façon générale, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ ou si cette limite n'existe pas, la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente.

Exemples 3.4

- La suite géométrique de terme général $u_n = u_0 k^n$ $(k \in \mathbb{C})$ ne tend pas vers 0 dès que $|k| \geq 1$ et $u_0 \neq 0$.
  La série de terme général u_n ne peut donc converger dans ce cas.
- Pour tout réel x, la suite de terme général $\cos nx$ ne tend pas vers 0.
  Donc la série $\sum \cos nx$ diverge grossièrement.

Propriété 3.5

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes de sommes respectives U et V et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors : la série de terme général $u_n + v_n$ converge vers $U + V$
la série de terme général $\lambda \times u_n$ converge vers $\lambda \times U$.

Démonstration

Les séries de terme général u_n et v_n sont les suites de terme général $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
La série de terme général $u_n + v_n$ est la suite de terme général $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_k + v_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k + \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = s_n + t_n$.
La série de terme général $\lambda \times u_n$ est la suite de terme général $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda \times u_k = \lambda \times \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \lambda \times s_n$.
Il suffit d'appliquer les règles d'opérations sur les suites.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = U \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = V \in \mathbb{C}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = U + V$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda \times s_n = \lambda \times U$.

Remarques 3.6

- L'ensemble des séries convergentes (muni des lois usuelles des suites) est un s.e.v. de l'ensemble des suites muni des lois usuelles (réel ou complexe suivant les cas).
- Dans le cas où les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, on a, pour tous complexes λ et μ :
  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$.
- Toujours d'un point de vue algébrique, l'application de l'ensemble des séries convergentes dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ qui, à toute série convergente $\sum u_n$ associe sa somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est une forme linéaire.
- Si $\lambda \neq 0$, alors les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum u_n$ sont de même nature ($\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \lambda s_n$).
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de natures différentes alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est divergente.
- Il est possible que la série $\sum (u_n + v_n)$ soit convergente alors que ni $\sum u_n$ ni $\sum v_n$ ne le soient.
  Par exemple, les séries de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ sont toutes deux grossièrement divergentes. Pourtant la série de terme général $u_n + v_n$ est la série nulle qui est convergente. On ne développera donc pas $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ sans s'assurer au préalable de la

convergence des séries.

Propriété 3.7

Une suite u d'éléments de K a même nature (CV ou DV) que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
En cas de convergence, on a : $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} u_n) - u_0$.

Démonstration

$s_p = \sum\limits_{k=0}^{p}(u_{k+1} - u_k) = \sum\limits_{k=0}^{p} u_{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{p} u_k = \sum\limits_{k=1}^{p+1} u_k - \sum\limits_{k=0}^{p} u_k = u_{p+1} - u_0$.

Exemple 3.8

La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$ est convergente, de somme 1.
En effet, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{1}{n+1} - \left(-\dfrac{1}{n}\right)$.
Puisque la suite de terme général $-\dfrac{1}{n}$ est convergente, il en est de même de la série de terme général $\sum -\dfrac{1}{n+1} - \left(-\dfrac{1}{n}\right)$.
En posant $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et en prenant pour premier terme u_1, on obtient
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1} - u_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) - u_1 = 0 - (-1) = 1$.

Remarque 3.9

Soit f une fonction telle que $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.

Si l'on considère la suite u de terme général $u_n = \int\limits_{0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, alors la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est la série de terme général $\int\limits_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Cette série converge vers $\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et le reste d'ordre n est $R_n = \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 3.10 Critère de Cauchy

Pour que la série numérique (réelle ou complexe) de terme général u_n soit convergente, il suffit que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles soit une suite de Cauchy.
Donc la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall m \geq n \geq N, \left|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k\right| < \varepsilon$.

Remarques 3.11

- Pour $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n-1$, on a $|s_m - s_{n-1}| = \left|\sum\limits_{k=0}^{m} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right| = \left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k + \sum\limits_{k=n}^{m} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right| = \left|\sum\limits_{k=n}^{m} u_k\right|$.
- Le critère de Cauchy peut encore s'écrire :
  - # $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall m > n \geq N, \ |s_m - s_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k\right| < \varepsilon$.
  - # $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N$ et $\forall p \geq 0, \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$.
- Si on pose $S_n^q = \sum\limits_{k=n+1}^{q} u_k$, le critère de Cauchy devient :
  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N$ et $\forall p \geq 0, |S_n^{n+p}| < \varepsilon$.
- La négation du critère de Cauchy est :
  $\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall N \in \mathbb{N}, \exists m \geq n \geq N, \ |s_m - s_n| \geq \varepsilon$.

Exemple 3.12

On se sert du critère de Cauchy pour montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.
En effet, $|s_{2n} - s_n| = s_{2n} - s_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.
Or $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+2} \geq ... \geq \frac{1}{2n}$, donc $s_{2n} - s_n \geq n \times \frac{1}{2n}$ c'est-à-dire $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$.

Définition 3.13

Soit u une suite de K. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ (c'est-à-dire $\sum |u_n|$) est convergente.

Propriété 3.14

Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration

On a : $\forall m \geq n \geq 0$, $\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k| = \left|\sum_{k=n}^{m} |u_k|\right|$.
Donc, si la série $\sum |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy, il en est de même de la série $\sum u_n$.

Exemple 3.15

La série de terme général $\frac{\sin n}{n(n+1)}$ est absolument convergente. En effet, pour tout entier n, on a $\left|\frac{\sin n}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, elle vérifie le critère de Cauchy et il en est donc de même de la série $\sum \left|\frac{\sin n}{n(n+1)}\right|$.

Remarques 3.16

- La réciproque de la propriété précédente est fausse. Par exemple, la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente alors que la série de terme général $|u_n| = \frac{1}{n}$ est divergente.
- Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors on a l'inégalité : $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Définition 3.17

On dit que la série $\sum u_n$ est semi-convergente si $\sum u_n$ converge et si $\sum |u_n|$ diverge.

Remarque 3.18

Pour tout réel x, on peut associer les deux nombres positifs x^+ et x^- définit par $x^+ = \sup(x,0)$ et $x^- = \sup(-x,0)$. On a $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.
Pour toute série $\sum u_n$, on peut définir deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.
Si la série $\sum u_n$ est semi-convergente alors les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes.
Plus précisément, la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si les deux séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.
Et, en cas de convergence, on a $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} u_n^+ - \sum_{n\geq 0} u_n^-$.

4. Séries à valeurs dans un espace vectoriel

La définition d'une série ne fait intervenir que la propriété de pouvoir "sommer" les premiers termes d'une suite. Nous pourrions nous contenter d'une structure de groupe. Toutefois afin de conserver la structure d'e.v. des séries convergentes, une extension naturelle est de considérer les suites à valeurs dans un espace vectoriel normé. Nombre des définitions et propriétés que nous venons d'aborder pour les séries réelles ou complexes peuvent donc être étendues sans difficulté aux espaces vectoriels normés.
Remarquons aussi que, si u est une suite d'éléments d'un e.v.n. E, alors nous savons que :
$\left\| \sum_{k=m}^{p} u_k \right\| \le \| u_m \| + \| u_{m+1} \| + ... + \| u_p \|$.
Nous pouvons étendre la notion de convergence absolue à tout e.v.n.. Dans le cas où l'espace est complet, nous obtenons : si la série (réelle) de terme général $\| u_n \|$ est convergente, il en est de même de la série de terme général u_n.

5. Séries réelles à termes positifs

Remarques 5.1

- La comparaison avec 0 ne peut se faire qu'avec une relation d'ordre totale compatible avec les lois donc dans $\mathbb{R}$.
- Les hypothèses de positivité de la suite ou des suites considérées, vraies à priori pour tout entier n, peuvent n'être vraies qu'à partir d'un certain rang n_0 : les résultats sur la nature des séries (pas sur leur somme) restent valables.
- Compte tenu du fait que les séries $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature, les énoncés qui vont suivre s'appliquent aussi, avec des modifications évidentes, au cas des séries réelles dont le terme général garde un signe constant à partir d'un certain rang.
- Les propriétés des séries à termes positifs sont utiles pour l'étude de la convergence absolue de séries à valeurs dans K.

Propriétés 5.2

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, la suite s des sommes partielles est alors une suite croissante. Si la suite s est majorée, la série converge et, réciproquement, si s n'est pas majorée, la série tend vers $+\infty$.

Remarques 5.3

- En cas de convergence, on a l'égalité: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n \ge 0}(s_n)$.
  En particulier, tout majorant de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un majorant de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- On note parfois $\sum_{n \ge 0} u_n < \infty$ pour exprimer qu'une série à termes positifs converge et $\sum_{n \ge 0} u_n = \infty$ pour exprimer qu'une série à termes positifs diverge.

Propriété 5.4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant $0 \le u_n \le v_n$ à partir d'un certain rang.
Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.
Si la série $\sum u_n$ diverge (c'est-à-dire ici tend vers $+\infty$) alors la série $\sum v_n$ diverge.
De plus, si l'inégalité est vérifiée pour tout entier n et si les séries convergent, alors on a $\sum_{n \ge 0} u_n \le \sum_{n \ge 0} v_n$.

Démonstration

On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. On a donc, pour tout entier $p \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{p} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{p} v_k$.

- Si la série $\sum v_n$ converge, on a, pour tout entier $p \geq n_0$, $\sum_{k=n_0}^{p} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{p} v_k \leq \sum_{n\geq n_0} v_n$.
  Donc $\sum_{n=0}^{p} u_n \leq u_0 + u_1 + ... + u_{n_0-1} + \sum_{n\geq n_0} v_n$.
  La suite des sommes partielles des (u_n) est donc majorée et la série $\sum u_n$ converge.
  Si $n_0 = 0$, on a $\sum_{n=0}^{p} u_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n$ pour tout entier p et donc $\sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n$
- Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{p} u_k = +\infty$ et donc $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{p} v_k = +\infty$.

Remarques 5.5

- Toujours dans les hypothèses de la propriété 5.4, on note R_n et T_n les restes d'ordre n respectivement des séries de terme général u_n et de terme général v_n.
  A partir du rang considéré, on a $R_n \leq T_n$.
- Dans le cas d'une série complexe $\sum u_n$, on a $|u_n| \geq |\mathrm{Re}(u_n)| \geq 0$ et $|u_n| \geq |\mathrm{Im}(u_n)| \geq 0$.
  Donc si la série $\sum |u_n|$ est de Cauchy, il en est de même des séries $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$.

Propriété 5.6

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (au voisinage de l'infini). On a :
Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge. Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Démonstration

Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe un réel $k > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, $(0 \leq)\ u_n \leq k v_n$ i.e. $(0 \leq)\ \frac{1}{k} u_n \leq v_n$.
Si la série de terme général v_n est convergente, il en est de même de la série de terme général $k v_n$ et de la série de terme général u_n.
Si la série de terme général u_n est divergente, il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{k} u_n$ et de la série de terme général v_n.

Remarques 5.7

Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$. Les conclusions de la propriété 5.6 sont donc les mêmes dans ce cas.

Propriété 5.8

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Si le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ est défini (i.e. v_n non nul) à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}_+^*$ alors les deux séries sont de même nature. En particulier, si $u_n \sim_\infty v_n$, alors les deux séries sont de même nature.

Démonstration

Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R}_+^*$, alors on peut choisir un réel strictement positif ε tel que $l - \varepsilon > 0$ et, à partir d'un certain rang, on a $l - \varepsilon \leq \frac{u_n}{v_n} \leq l + \varepsilon$ et donc $(0 \leq)\ (l - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (l + \varepsilon) v_n$.

Si la série de terme général v_n est convergente, il en est de même de la série de terme général $(l + \varepsilon)\, v_n$ et de la série de terme général u_n.
Si la série de terme général u_n est convergente, il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{l-\varepsilon} u_n$ et de la série de terme général v_n.

Remarques 5.9

- Dans la proposition "Si $u_n \sim_\infty v_n$, alors les deux séries sont de même nature", il est essentiel que les termes généraux u_n et v_n gardent un signe constant quand n tend vers l'infini.
  En effet, si, par exemple, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + u_n)$, on a bien $u_n \sim_\infty v_n$.
  Nous verrons que la série $\sum u_n$ est convergente (critère des séries alternées) mais la série $\sum v_n$ diverge (D.L. d'ordre 2).
- S'il existe un réel $M > 0$ tel que, à partir d'un certain rang, $nu_n \geq M$, alors la série $\sum u_n$ est divergente. C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = \lambda > 0$ c'est-à-dire si $u_n \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{n}$.
- En terme d'équivalent, il est parfois utile de connaître la formule de Stirling : $n! \sim_\infty n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Corollaire 5.10

Soient $\sum u_n$ une série et $\sum v_n$ une série convergente à termes positifs.
On suppose qu'à partir d'un certain rang, il existe un réel positif k tel que $|u_n| \leq k v_n$.
Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exemple 5.11

Soit a un réel et soit la série de terme général $\frac{e^{ina}}{n^2}$. On a $\left|\frac{e^{ina}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum \frac{e^{ina}}{n^2}$ est convergente.

Propriété 5.12

Soient u et v deux suites de termes strictement positifs telles que, à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Si la série $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum u_n$.
Si la série $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.

Remarque 5.13

On peut exprimer l'inégalité "$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$", en disant que la suite u décroît plus vite que la suite v.

Démonstration

Supposons que l'inégalité est vérifiée à partir du rang p et posons $c = \frac{u_p}{v_p}$.
On a donc, pour tout entier $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et en particulier $\frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_p}{v_p}$ c'est-à-dire $u_n \leq c\, v_n$ i.e. $u_n = O(v_n)$.

Exemple 5.14

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et soit v la suite définie par $v_n = 2 - u_n$.
On cherche à étudier la convergence de la série $\sum v_n$.
On vérifie dans un premier temps que la suite u est bien définie et vérifie $1 \leq u_n < 2$.

\#	Vrai au rang 0.

#	On suppose vrai au rang n.

$1 \leq u_n < 2$

$\Rightarrow \quad 3 \leq u_n + 2 < 4$

$\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{3} \leq \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4}$

$\Rightarrow \quad 1 < u_{n+1} < 2$

Donc $v_n > 0$ pour tout entier n.
Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \sqrt{2+x}$.
f est dérivable sur $]1;2[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.
On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2-u_{n+1}}{2-u_n} = \dfrac{f(u_n)-f(2)}{u_n-2}$.
D'après le théorème des accroissements finis, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{3}} < 1$ pour tout entier n.
Or la série de terme général $w_n = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$ est convergente et on a $0 \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ pour tout entier n.
Donc la série de terme général v_n converge.

Remarque 5.15

Soit a un réel. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^a}$.
C'est une série à termes positifs.
Indication : Pour étudier la convergence de cette série, la comparaison avec une intégrale est la méthode la mieux adaptée. Toutefois, nous ne pouvons pas encore utiliser ce théorème. Il faut donc employer une autre méthode.)
Nous avons montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$ est convergente, de somme 1.
Puisque les séries $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont équivalentes, on en déduit que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente.
Nous avons aussi montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente.
Si $a \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^a} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et si $a \leq 1$, on a $\dfrac{1}{n^a} \geq \dfrac{1}{n}$.
Donc la série $\sum \dfrac{1}{n^a}$ converge si $a \geq 2$ et diverge si $a \leq 1$.
Il nous reste donc à étudier le cas $1 < a < 2$.
Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^{a-1}} = x^{1-a}$.
La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = (1-a)x^{-a} = \dfrac{1-a}{x^a}$.
Soit la série de terme général $v_n = f(n) - f(n+1)$.
C'est à nouveau une série à termes positifs.
Puisque $f \in \mathscr{C}^1([1, +\infty[)$, on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur tout intervalle de la forme $[n, n+1]$. Donc il existe un réel x_n de $]n, n+1[$ tel que $\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} = f'(x_n)$.
C'est-à-dire $f(n+1) - f(n) = \dfrac{1-a}{x_n^a}$.
Il s'en suit que $v_n = \dfrac{a-1}{x_n^a} = (a-1) \times \dfrac{n^a}{x_n^a} \times \dfrac{1}{n^a} = (a-1) \times \left(\dfrac{n}{x_n}\right)^a u_n$.
On obtient alors $\dfrac{v_n}{u_n} = (a-1) \times \left(\dfrac{n}{x_n}\right)^a$.

De plus, les (x_n) vérifient $\dfrac{n}{n+1} \leq \dfrac{n}{x_n} \leq \dfrac{n}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = 1$.
Nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = a - 1$ et, puisque $a > 1$, que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
Or $\sum\limits_{k=1}^{p} v_k = \sum\limits_{k=1}^{p} f(k) - f(k+1) = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + ... + f(p) - f(p+1) = 1 - f(p+1) = 1 - \dfrac{1}{(p+1)^{a-1}}$.

Puisque $a - 1 > 0$, $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(p+1)^{a-1}} = 0$ et donc la série $\sum v_n$ converge (vers 1).

Pour conclure :

Propriété 5.16 (*Séries de Riemann*)

La série de terme général $\frac{1}{n^a}$ converge si et seulement si $a > 1$.

Remarque 5.17

Nous savons que, si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.
Cette formule est fausse pour un produit de séries.
Par exemple, si $u_n = \frac{1}{2^n}$ et $v_n = \frac{1}{3^n}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n \times v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$.
Or $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
D'où $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \neq \frac{6}{5}$.

Définitions 5.18

Soient u et v deux suites de K.
On appelle suite produit (de Cauchy) des suites u et v la suite w de terme général :
$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.
On appelle série produit (de Cauchy) des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Remarque 5.19

Soient a et b deux éléments de K.
On considère les séries de termes généraux $u_n = \frac{a^n}{n!}$ et $v_n = \frac{b^n}{n!}$.
On a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \times \frac{b^k}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = n! w_n$ où w_n désigne le terme général de la série produit.

Propriété 5.20

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes à termes positifs, alors la série produit (de Cauchy) $\sum w_n$ converge et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

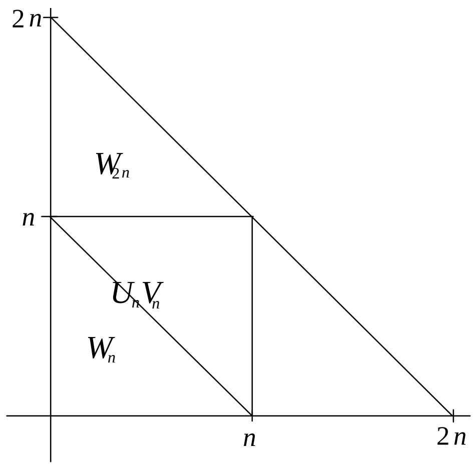
Démonstration

On pose $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On peut écrire $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ donc $W_n = \sum_{p+q \leq n} u_p v_q$.
Or $U_n V_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_p v_q$.

On s'intéresse aux différents couples (p,q) de W_n, de $U_n V_n$ et de W_{2n}.

Si on représente ceux ci dans le plan, on a :



Puisque tous les termes sont positifs, on en déduit que $W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}$.
On en déduit que la série de terme général w_n est majorée donc convergente.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_{2n}$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exemple 5.21

Soient a et b deux éléments de K. On considère les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{b^n}{n!}$.
On a vu que le terme général de la série produit est $w_n = \dfrac{(a+b)^n}{n!}$.
D'après la propriété 5.20, $e^{a+b} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(a+b)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!} \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{b^n}{n!} = e^a \times e^b$.

Corollaire 5.22

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit (de Cauchy) $\sum w_n$ est absolument convergente et on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration

D'après les hypothèses, les séries de terme général $|u_n|$ et $|v_n|$ sont convergentes.
Il en est donc de même de la série de terme général $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| \times |v_{n-k}|$.
Or $|w_n| = \left| \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}| = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| \times |v_{n-k}| = c_n$.
La série de terme général $|w_n|$ est donc convergente.
On pose $W_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$, $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$, $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |v_k|$.
On a : $|U_n V_n - W_n| = |\sum\limits_{\substack{0\leq p\leq n, 0\leq q\leq n \\ p+q>n}} u_p v_q| \leq \sum\limits_{\substack{0\leq p\leq n, 0\leq q\leq n \\ p+q>n}} |u_p||v_q| = A_n B_n - C_n$
Or les suites $A_n B_n$ et C_n ont même limite, il en est donc de même des suites $U_n V_n$ et W_n.

Remarque 5.23

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont semi-convergentes, la série produit (de Cauchy) $\sum w_n$ n'est pas nécessairement convergente.

Par exemple, on prend $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 0$ et $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ pour $n \geq 2$.
On a $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=2}^{n-2} u_k v_{n-k} = \sum_{k=2}^{n-2} \dfrac{(-1)^k}{\ln k} \times \dfrac{(-1)^{n-k}}{\ln(n-k)} = \sum_{k=2}^{n-2} \dfrac{(-1)^n}{\ln k \times \ln(n-k)} = (-1)^n \sum_{k=2}^{n-2} \dfrac{1}{\ln k \times \ln(n-k)}$.
En particulier, $w_{4n} = \sum_{k=2}^{4n-2} \dfrac{1}{\ln k \times \ln(4n-k)}$.
Or, si $n \leq k \leq 3n$, on a $n \leq 4n - k \leq 3n$, $\dfrac{1}{\ln k} \geq \dfrac{1}{\ln 3n}$ et $\dfrac{1}{\ln(4n-k)} \geq \dfrac{1}{\ln 3n}$.
D'où, pour $n \geq 2$, $w_{4n} = \sum_{k=2}^{4n-2} \dfrac{1}{\ln k \times \ln(4n-k)} \geq \sum_{k=n}^{3n} \dfrac{1}{\ln k \times \ln(4n-k)} \geq \sum_{k=n}^{3n} \dfrac{1}{(\ln 3n)^2} \geq \dfrac{2n}{(\ln 3n)^2}$.
Donc $(w_{4n})_{n\geq 2}$ ne converge pas vers 0.
A fortiori, w ne tend pas vers 0 et $\sum w_n$ diverge grossièrement.

6. Critères de convergence

Par les règles de comparaison avec des séries connues, nous obtenons les corollaires :

Corollaire 6.1

Soit u une suite de nombres réels positifs.
Si, à partir d'un certain rang, on a $n^a u_n \leq c$ avec $a > 1$ (et $c > 0$), alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(C'est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha u_n = 0$, ce qu'on peut traduire par $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$)

Si, à partir d'un certain rang, on a $n^a u_n > c$ avec $a \leq 1$ et $c > 0$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Corollaire 6.2

Soit u une suite de nombres réels ou complexes.
Si, à partir d'un certain rang, on a $|u_n| \leq k^n$ avec $0 \leq k < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Propriété 6.3 Règle de Cauchy

Soit u une suite numérique.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l > 1$ ($l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration

\# Si $0 \leq l < 1$, alors il existe un réel ε tel que $0 \leq l + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$) .
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l$, on a, à partir d'un certain rang, $|u_n|^{1/n} < l + \varepsilon$.
C'est-à-dire $|u_n| \leq (l + \varepsilon)^n$.

\# Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l > 1$, alors la suite u ne converge pas vers 0. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarques 6.4

- Avec les hypothèses qui s'imposent, si f et g sont deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors l'éventuel limite de $f(x)^{g(x)}$ en $+\infty$ est une forme indéterminée.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = 1$, on ne peut en général rien dire.
  Toutefois, si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = 1^+$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- Attention, dire que la série $\sum u_n$ converge n'implique pas que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l < 1$.

Propriété 6.5 Règle de D'Alembert

Soit u une suite numérique.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l > 1$ ($l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$), alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration

\# Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, alors il existe un réel ε tel que $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < l + \varepsilon < 1$.

Soit la suite v définie par $v_n = (l+\varepsilon)^n$. La série $\sum v_n$ est convergente. De plus, on a $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

\# Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l > 1$, alors u est croissante à partir d'un certain rang et ne tend donc pas vers zéro.

Remarque 6.6

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, on ne peut en général rien dire.
Toutefois, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1^+$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

Remarque 6.7

On appelle limite supérieure d'une suite u et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n$ ou $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$ la borne supérieure des valeurs d'adhérence de la suite u.
On appelle limite inférieure d'une suite u et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n$ ou $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$ la borne inférieure des valeurs d'adhérence de la suite u.
Les règles de Cauchy et de D'Alembert sont les conséquences des propriétés suivantes (dont nous verrons une partie des preuves un peu plus loin) :

Soit u une suite de nombres réels positifs.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n^{1/n} = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf u_n^{1/n} = l > 1$ ($l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$), alors la série $\sum u_n$ est divergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \inf \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$ ($l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$), alors la série $\sum u_n$ est divergente.
On remarque, en particulier, que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup u_n = l$.

Propriété 6.8

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ ($l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l$.

Remarque 6.9

La réciproque est fausse. Par exemple, soient deux réels strictement positifs a et b et soit la série de terme général u_n où $u_{2n} = a^n b^n$ et $u_{2n+1} = a^{n+1} b^n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = \sqrt{ab}$.
Or $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a$ si n est pair et $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = b$ si n est impair.
Si $a \neq b$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ n'a donc pas de limite quand n tend vers l'infini. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sup(a, b)$.
D'après le critère de D'Alembert, la série de terme général u_n converge si $\sup(a,b) < 1$.
D'après le critère de Cauchy, la série de terme général u_n converge si $ab < 1$.
Le critère de Cauchy est donc plus "fin" que le critère de D'Alembert.

Propriété 6.10 Règle de Duhamel

Soit b un réel.
Soit u une suite de termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Si $b > 1$ alors la série $\sum u_n$ est convergente.
Si $b < 1$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Démonstration

Soit un réel $a > 0$ et soit v la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^a}$ pour $n \geq 1$.
On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^a = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^a = 1 - \frac{a}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Or $\frac{a}{n+1} = \frac{a}{n} + \left(\frac{a}{n+1} - \frac{a}{n}\right) = \frac{a}{n} - \frac{a}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
On obtient donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
D'où $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b-a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si $a \neq b$, le signe de $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend, à partir d'un certain rang, que du signe de $b - a$.

Si $b > 1$, il existe un réel a tel que $b > a > 1$. On a $b - a > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 0$.
D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
Puisque $a > 1$, la série de terme général $v_n = \frac{1}{n^a}$ est convergente donc il en est de même de $\sum u_n$.

Si $b < 1$, il existe un réel a tel que $1 > a > b$.
On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
La série de terme général $v_n = \frac{1}{n^a}$ est divergente donc il en est de même de $\sum u_n$.

Remarques 6.11

- Le cas $b = 1$ est à nouveau un cas indéterminé.
- Il existe d'autres façons d'écrire le critère de Duhamel :
  - # On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \frac{a_n}{n}}$ avec $a_n > 0$.
    Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l > 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
    Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
  - # Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l > 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
    Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l < 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Propriété 6.12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction $\mathscr{C}^0$, décroissante et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ sont simultanément divergentes ou convergentes.

Démonstration

Soit v la suite définie par $v_n = f(n)$.
Pour tout entier n et pour tout entier strictement positif p, on a $\sum_{k=0}^{n+p} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k = \sum_{k=0}^{n} f(k) + \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k)$.
Sur chaque intervalle du type $[i, i+1]$, puisque f est décroissante, on a $f(i+1) \leq f(x) \leq f(i)$.

On obtient $\int_i^{i+1} f(i+1)\,\mathrm{d}x \leq \int_i^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_i^{i+1} f(i)\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $f(i+1) \leq \int_i^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(i)$.

D'où, pour tout $i > 0$, $\int_i^{i+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(x)\,\mathrm{d}x$.

En faisant la somme des inéquations pour k variant de $n+1$ à $n+p$, on obtient alors :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{n+1}^{n+p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k \leq \int_n^{n+p} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La série $\sum f(n)$ est convergente $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} f(k)$ possède une limite finie quand p tend vers l'infini.

$\Leftrightarrow$ $\int_n^{n+p} f(x)\,\mathrm{d}x$ possède une limite finie quand p tend vers l'infini.

$\Leftrightarrow$ L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Propriété 6.13 (*Séries de Bertrand*)

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.

Démonstration

Résultat sur les intégrales généralisées

Définition 6.14

On appelle série alternée une série réelle dont le terme général est de la forme $(-1)^n v_n$ ou de la forme $(-1)^{n+1} v_n$ où v est une suite décroissante de termes positifs qui converge vers 0.

Propriété 6.15

Une série alternée $\sum u_n$ est convergente. Si on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n, alors les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes et convergent vers la somme de la série.

Remarque 6.16

Plus précisément, si $\sum u_n$ est une série alternée de la forme $(-1)^n v_n$ alors $\sum_{k=0}^{2p+1} u_k \leq \sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{k=0}^{2p} u_k$.

Démonstration

Soit une série alternée de terme général $u_n = (-1)^n v_n$. On pose $s_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$.

On a $s_{2p+2} - s_{2p} = \sum_{k=0}^{2p+2} u_k - \sum_{k=0}^{2p} u_k = u_{2p+2} + u_{2p+1} = (-1)^{2p+2} v_{2p+2} + (-1)^{2p+1} v_{2p+1} = v_{2p+2} - v_{2p+1} \leq 0$ et

$s_{2p+1} - s_{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p+1} u_k - \sum_{k=0}^{2p-1} u_k = (-1)^{2p+1} v_{2p+1} + (-1)^{2p} v_{2p} = -v_{2p+1} + v_{2p} \geq 0$ car v est une suite décroissante.

La suite de terme général s_{2n} est donc décroissante et la suite de terme général s_{2n+1} est croissante.

Puisque $s_{2n+1} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} v_{2n+1} = -v_{2n+1} \leq 0$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - s_{2n} = 0$, les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes et sont donc convergentes de limite commune l qui vérifie $s_{2n+1} \leq l \leq s_{2n}$.

De plus, on a $\sum_{n\geq 0} u_n = l$.

Propriété 6.17 Règle d'Abel

Soit e une suite de nombres complexes telle que, pour tout entier p, la somme $\tilde{S}_p = \sum_{k=1}^{p} e_k$ soit bornée.
Soit u une suite de nombres positifs, décroissante et qui tend vers 0. Alors la série $\sum e_n u_n$ est convergente.

Démonstration

Soit n un entier positif et p un entier strictement positif.
La série $\sum e_n u_n$ est convergente si, la suite de terme général $S_n^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} e_k u_k$ en n tend vers 0 quand n tend vers l'infini indépendamment de p (critère de Cauchy).
On a $e_i = \tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}$ pour tout entier non nul i.

D'où $S_n^{n+p} = e_{n+1}u_{n+1} + e_{n+2}u_{n+2} + \ldots + e_{n+p}u_{n+p} = u_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n) + u_{n+2}(\tilde{S}_{n+2} - \tilde{S}_{n+1}) + \ldots + u_{n+p}(\tilde{S}_{n+p} - \tilde{S}_{n+p-1})$
$= -u_{n+1}\tilde{S}_n + (u_{n+1} - u_{n+2})\tilde{S}_{n+1} + (u_{n+2} - u_{n+3})\tilde{S}_{n+2} + \ldots + (u_{n+p-1} - u_{n+p})\tilde{S}_{n+p-1} + u_{n+p}\tilde{S}_{n+p}$
On obtient $|S_n^{n+p}| = \left|-u_{n+1}\tilde{S}_n + (u_{n+1} - u_{n+2})\tilde{S}_{n+1} + (u_{n+2} - u_{n+3})\tilde{S}_{n+2} + \ldots + (u_{n+p-1} - u_{n+p})\tilde{S}_{n+p-1} + u_{n+p}\tilde{S}_{n+p}\right|$
$\leq \left|-u_{n+1}\tilde{S}_n\right| + \left|(u_{n+1} - u_{n+2})\tilde{S}_{n+1}\right| + \left|(u_{n+2} - u_{n+3})\tilde{S}_{n+2}\right| + \ldots + \left|(u_{n+p-1} - u_{n+p})\tilde{S}_{n+p-1}\right| + \left|u_{n+p}\tilde{S}_{n+p}\right|$
$\leq |-u_{n+1}|\left|\tilde{S}_n\right| + |(u_{n+1} - u_{n+2})|\left|\tilde{S}_{n+1}\right| + |(u_{n+2} - u_{n+3})|\left|\tilde{S}_{n+2}\right| + \ldots.$
$\ldots + |(u_{n+p-1} - u_{n+p})|\left|\tilde{S}_{n+p-1}\right| + \left|u_{n+p}\right|\left|\tilde{S}_{n+p}\right|.$

Puisque tous les $\tilde{S}_k$ sont bornés, il existe un entier positif M tel que :
$$|S_n^{n+p}| \leq |-u_{n+1}|M + |(u_{n+1} - u_{n+2})|M + |(u_{n+2} - u_{n+3})|M + \ldots + |(u_{n+p-1} - u_{n+p})|M + \left|u_{n+p}\right|M.$$
Puisque u est décroissante et positive, on obtient :
$$|S_n^{n+p}| \leq u_{n+1}M + (u_{n+1} - u_{n+2})M + (u_{n+2} - u_{n+3})M + \ldots + (u_{n+p-1} - u_{n+p})M + u_{n+p}M = 2u_{n+1}M.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en déduit que, pour tout réel ε, on peut trouver un entier N tel que :
$\forall p \geq 0$, si $n \geq N$ alors $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} e_k u_k\right| < \varepsilon$.

Remarques 6.18

- La règle de convergence des séries alternées n'est qu'un cas particulier de la règle d'Abel (avec $e_n = (-1)^n$ ou $e_n = (-1)^{n+1}$).
- On aurait pu remplacer la condition "u une suite de nombre positifs, décroissante" par "la série de terme général $|u_n - u_{n+1}|$ converge".

7. Approximation d'un série numérique convergente

Remarque 7.1

Soit $\sum u_n$ une série qui converge vers S et soit $(s_n)_{n\geq 0}$ la suite des sommes partielles.
Soit $R_n = S - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k\geq n+1} u_k$ le reste partiel d'ordre n.
Chercher un résultat approchée de la limite S de la série $\sum u_n$ consiste donc à évaluer R_n.
On a, en particulier, que $|S - s_n| = |R_n| \leq \sum_{k\geq n+1} |u_k|$.

Propriété 7.2

Soit $\sum u_n$ une série alternée. Alors R_n possède le signe de u_{n+1} et on a l'inégalité $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration

Nous avons vu que, si $u_n = (-1)^n v_n$, alors, pour tout entier p, $s_{2p+1} \leq l \leq s_{2p+2} \leq s_{2p}$.
On a donc $\left|s_{2p+1} - l\right| \leq \left|s_{2p+2} - s_{2p+1}\right|$ et $\left|s_{2p} - l\right| \leq \left|s_{2p+1} - s_{2p}\right|$ (ce qui peut être vu en termes de distances).
On obtient que, pour tout entier n, $|s_n - l| \leq |s_{n+1} - s_n|$. C'est-à-dire, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Propriété 7.3

Soit u une suite numérique.
Si, à partir d'un certain rang, on a $|u_n|^{1/n} \leq c$ avec $0 \leq c < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et le reste partiel d'ordre n vérifie alors $|R_n| \leq \dfrac{c^{n+1}}{1-c}$ (à partir du rang considéré).

Démonstration

A partir du rang considéré, nous avons $|u_n| \leq c^n$. Or la série de terme général c^n est convergente.
Donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $|R_n| = \left|\sum\limits_{k\geq n+1} u_k\right| \leq \sum\limits_{k\geq n+1} |u_k| \leq \sum\limits_{k\geq n+1} c^k$.
Plus précisément, $\sum\limits_{k=n+1}^{p} c^k = c^{n+1} \sum\limits_{k=0}^{p-n-1} c^k = c^{n+1} \dfrac{1-c^{p-n}}{1-c}$. Donc $\sum\limits_{k\geq n+1} c^k = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{p} c^k = c^{n+1} \dfrac{1}{1-c}$.

Remarque 7.4

Les conditions de la propriété 7.3 sont vérifiées si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = l < 1$ ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup |u_n|^{1/n} = l < 1$.

Propriété 7.5

Soit u une suite numérique.
Si, à partir d'un certain rang, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq c$ avec $0 \leq c < 1$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et le reste partiel d'ordre n vérifie alors $|R_n| \leq \dfrac{c}{1-c}|u_n|$ (à partir du rang considéré).

Démonstration

La série de terme général $v_n = c^n$ est convergente et $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq c = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente.
A partir du rang donné et, $\forall p\in\mathbb{N}$, on a donc $\left|u_{n+p}\right| \leq c\left|u_{n+p-1}\right| \leq c^2\left|u_{n+p-2}\right| \leq \ldots \leq c^{p-1}|u_{n+1}| \leq c^p|u_n|$.
D'où $\sum\limits_{k=1}^{p}|u_{n+k}| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} c^{k-1}|u_{n+1}| = |u_{n+1}| \sum\limits_{k=1}^{p} c^{k-1} = |u_{n+1}| \dfrac{1-c^p}{1-c}$.
On obtient alors $|R_n| \leq \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{p} |u_k| = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{p}|u_{n+k}| \leq \lim\limits_{p\to+\infty}|u_{n+1}| \dfrac{1-c^p}{1-c} = |u_{n+1}| \dfrac{1}{1-c} \leq \dfrac{c}{1-c}|u_n|$.

Remarque 7.6

Les conditions de la propriété 7.5 sont vérifiées si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$ ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$.

Propriété 7.7

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction $\mathscr{C}^0$, décroissante et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
En cas de convergence de la série de terme général $u_n = f(n)$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste partiel d'ordre n vérifie :
$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq R_n \leq \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

Pour tout entier n et pour tout entier strictement positif p, nous savons que
$\int_{n+1}^{n+p+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \leq \int_{n}^{n+p} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Le résultat découle directement du passage à la limite.

8. Autres problèmes

Remarque 8.1

Quand on considère des sommes finies, les problèmes d'associativité et de commutativité sont relativement simples. Lorsque nous considérons des somme infinies (qui viennent d'être définies en terme de séries convergentes), le problème est différent et les réponses à ces problèmes sont nuancées.

Par exemple, nous avons déjà vu que la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.
Pourtant, si l'on réunit les termes deux par deux, on a , pour tout entier n,
$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^{2k}+(-1)^{2k+1}\right] = 0$.
On serait tenter d'en conclure que lorsque n tend vers l'infini cette somme donne la limite de la série $\sum(-1)^n$ ce qui est faux.

Voici une autre façon de faire : on suppose que la série de terme général $(-1)^n$ converge et que S est sa somme. On a donc $S = 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+.......$
$= 1+(-1)[1+(-1)+1(-1)+1+.....]$
$= 1-S$ d'où $S = \frac{1}{2}$!!!!!!!!

Une question qui se pose est donc de savoir quand on peut rassembler les termes d'une série par "blocs" sans en changer sa nature ou sa somme.

Propriété 8.2

Soit σ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On considère les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où $v_0 = \sum_{k=0}^{\sigma(0)} u_k$ et $v_n = \sum_{k=\sigma(n-1)+1}^{\sigma(n)} u_k$ pour tout entier $n > 0$.

- Si la série $\sum u_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.
- Si u est une série réelle à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
  Dans les cas de convergence simultanée, on a $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} v_n$.

Démonstration

Pour tout entier p, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$ et $S'_p = \sum_{k=0}^{p} v_k = \sum_{k=0}^{\sigma(p)} u_k = S_{\sigma(p)}$.

- La suite S' est une sous-suite de S.
  Donc, si S converge, il en est de même de S' avec une limite commune.
- Si u est une série réelle à termes positifs, les suites S et S' sont croissantes.
  Si S est convergente, elle est donc majorée et il en est donc nécessairement de même pour S'.

Remarque 8.3

Il existe d'autres cas où il y a équivalence entre la convergence de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum v_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et les longueurs des "tranches" sont bornées i.e. $\exists k\in\mathbb{R}^+ \,/\, \forall n\in\mathbb{N},\ \sigma(n+1) - \sigma(n) \leq k$.

Tous les termes d'une même "tranche" sont de même signe.

Propriété 8.4

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de $\mathbb{N}$.
Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs.
Alors $\sum\limits_{i\in I} \sum\limits_{n\in A_i} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition

On dit qu'une série $\sum u_n$ est commutativement convergente si et seulement si, pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est convergente.

Remarque 8.5

L'idée est simplement d'intervertir l'ordre des termes.

Exemple et contre-exemple 8.6

- La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$. C'est un série semi-convergente.
  On a donc $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots$
  On considère l'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$
  $3p + 1 \mapsto 2p + 1.$
  $3p + 2 \mapsto 2(2p + 1) - 1 = 4p + 2.$
  $3p + 3 \mapsto 2(2p + 2) = 4p + 4.$
  On vérifie aisément que φ est bien une bijection.
  $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 3$, $\varphi(5) = 6$, $\varphi(6) = 8$, ...
  La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite : $\frac{1}{1}; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{-1}{6}; \frac{1}{8};\quad \ldots;\quad \frac{1}{2p+1}; \frac{-1}{4p+2}; \frac{-1}{4p+4};\quad \ldots$
  $$\sum_{k=0}^{3p+3} u_{\varphi(k)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \quad .. + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{4p+2} - \frac{1}{4p+4}$$
  $$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \quad .. + \frac{1}{4p+2} - \frac{1}{4p+4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \quad .. + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2}\right)$$
  De façon plus générale, au passage à la limite, on obtient $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} u_{\varphi(k)} = \frac{1}{2}\ln 2$.
  Donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} u_{\varphi(k)} \neq \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} u_k$.
- La série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente.
  On considère l'application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$
  $3p + 1 \mapsto 2(2p + 1) - 1 = 4p + 1.$
  $3p + 2 \mapsto 2(2p + 1) - 1 = 4p + 3.$
  $3p + 3 \mapsto 2(2p + 1) = 2p + 2.$
  On vérifie aisément que φ est bien une bijection.
  $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 3$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 5$, $\varphi(5) = 7$, $\varphi(6) = 4$, ...

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite : $\frac{-1}{\sqrt{1}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{-1}{\sqrt{5}};\frac{-1}{\sqrt{7}}\frac{1}{\sqrt{4}};\ ...;\frac{-1}{\sqrt{4p-3}};\frac{-1}{\sqrt{4p-1}};\frac{1}{\sqrt{2p}};....$

On considère la série $\sum v_n$ obtenue en sommant par blocs de 3.

On a $v_p = \frac{-1}{\sqrt{4p-3}}+\frac{-1}{\sqrt{4p-1}}+\frac{1}{\sqrt{2p}} = \frac{1}{\sqrt{2p}}\left[1-\frac{1}{\sqrt{2-\frac{3}{2p}}}-\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{2p}}}\right]$.

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2-\frac{3}{2p}}}-\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{2p}}} = -\sqrt{2}$ donc $v_n \sim \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2n}}$ (de signe constant).

On obtient enfin que la série $\sum v_n$ diverge. Il en est de même de la série $\sum u_{\varphi(n)}$.

Propriété 8.7

Une série numérique est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.
Dans ce cas, la somme ne change pas en modifiant l'ordre des termes.

Remarque 8.8

On s'est intéressé à une somme infini de termes. Le problème peut se poser de façon similaire à un produit infini de termes. Par exemple, pour que $\prod\limits_{k=0}^{p} u_k$ est une limite finie quand p tend vers l'infini, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Une solution consiste à remarquer que d'un produit, on peut se ramener à une somme, en utilisant les logarithmes s'il n'y a pas de termes négatifs ou nuls. En effet, $\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k$.

Remarques 8.9

- Une extension des séries se trouve dans les limites des sommes doubles ou triples et aussi des sommes non dénombrables.
- La méthode que nous avons utilisée pour définir des sommes infinies semble naturelle.
  Pourtant il existe d'autres types de convergence pour une série $\sum u_n$:
  - # Au sens de Cesaro.
    La somme si elle existe est $S = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} S_k\right)$: c'est la moyenne des sommes partielles.
    En considérant ce type de limite, on a bien $S = \frac{1}{2}$ quand $u_n = (-1)^n$.
  - # Au sens d'Abel.
    La somme si elle existe est $S = \lim\limits_{\substack{r\to1\\ r<1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n r^n$.

  Certains disent que ces deux types de convergence sont plus "fines" que la classique dans le sens où elles fournissent des convergences à des séries qui n'en ont pas dans la méthode classique.