Séries trigonométriques

1. Généralités

Définitions 1.1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
On appelle série trigonométrique toute série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont le terme général est défini sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ (1).

Remarques 1.2

- Les séries trigonométriques sont, comme les séries entières, des séries de fonctions d'une forme particulière.
- Avec les notations de la définition 1.1, on a, pour tout réel t, $f_0(t) = a_0$ et b_0 n'intervient pas.
  On supposera donc que $b_0 = 0$.

Propriété 1.3

Le terme général d'une série trigonométrique peut s'écrire :
$\forall t\in\mathbb{R}$, $f_0(t) = a_0$ et $f_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$ si $n \geq 1$ (2).
On parle alors de la série $\sum(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$.

Démonstration

Puisque $\cos nt = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ et $\sin nt = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \dfrac{ie^{-int} - ie^{int}}{2}$, on obtient
$f_n(t) = a_n \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \dfrac{ie^{-int} - ie^{int}}{2} = \dfrac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \dfrac{a_n + ib_n}{2} e^{-int}$.
Il suffit donc de poser : $a_0 = c_0$, $b_0 = 0$ et $\begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$ si $n \geq 1$ pour obtenir la forme voulue.

Remarques 1.4

Avec les notations de la définition et de la propriété :

- La forme (2) est appelée la forme complexe de la série trigonométrique et la forme (1) est appelée la forme réelle même si, rappelons-le, les coefficients a_n et b_n peuvent être complexes.
- En cas de convergence, la somme $\sum\limits_{n\geq 0}(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ peut être notée $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$.
  Cette notation correspond à une série dite à double entrée.
- On a $\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = (c_n - c_{-n})i \end{cases}$ pour $n \geq 1$. On peut donc facilement passer d'une forme à l'autre.

- Pour tout entier n, la fonction f_n est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et est 2π-périodique.
  En particulier, si la série numérique $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge pour un réel x et si S est sa somme, alors la série numérique $\sum (a_n \cos n(x+2\pi) + b_n \sin n(x+2\pi))$ est convergente de même somme S. Ce que l'on peut aussi traduire aussi par : en cas de convergence, la fonction $S(x) = \sum_{n\geq 0}(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$ est 2π-périodique.

2. Convergence

Propriété 2.1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ trois suites complexes.
On considère une série trigonométrique des formes équivalentes (1) ou (2).
La série de terme général $|a_n| + |b_n|$ (pour $n \geq 0$) et la série de terme général $|c_n| + |c_{-n}|$ (pour $n \geq 0$) sont de même nature.
En cas de convergence, la série trigonométrique $\sum(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2

Les hypothèses de convergence sont vérifiées si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont toutes les deux absolument convergentes ou si les séries $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont toutes les deux absolument convergentes.

Démonstration

On a $|a_n|+|b_n| = |c_n+c_{-n}| + |(c_n-c_{-n})i| \leq |c_n|+|c_{-n}|+|c_n - c_{-n}| \leq |c_n|+|c_{-n}|+|c_n|+|c_{-n}| \leq 2(|c_n|+|c_{-n}|)$
et $|c_n|+|c_{-n}| = \left|\dfrac{a_n - ib_n}{2}\right| + \left|\dfrac{a_n + ib_n}{2}\right| \leq \dfrac{|a_n|+|b_n|}{2} + \dfrac{|a_n|+|b_n|}{2} \leq |a_n|+|b_n|$.
En cas de convergence, on obtient directement le résultat puisque $|a_n \cos nt + b_n \sin nt| \leq |a_n| + |b_n|$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall t\in\mathbb{R}$ et puisque les séries $\sum(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ et $\sum(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$ sont les mêmes.

Exemple 2.3

La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}\cos nx - \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\sin nx$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Rappel 2.4 Règle d'Abel

Soit e une suite de nombres complexes telle que, pour tout entier p, la somme $\tilde{S}_p = \sum_{k=1}^{p} e_k$ soit bornée.
Soit u une suite de nombres positifs, décroissante et qui tend vers 0.
Alors la série $\sum e_n u_n$ est convergente.

Corollaire 2.5

Soit u une suite de nombres positifs, décroissante et qui tend vers 0.
Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, les séries numériques $\sum u_n e^{inx}$, $\sum u_n \cos nx$ et $\sum u_n \sin nx$ sont convergentes.
Ce qui signifie que les séries de fonctions $\sum u_n e^{inx}$, $\sum u_n \cos nx$ et $\sum u_n \sin nx$ sont simplement convergentes sur tout intervalle de la forme $]2k\pi;(2k+2)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$.
De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha;(2k+2)\pi-\alpha]$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ vérifie $0 < \alpha < \pi$.

Remarques 2.6

- La convergence est donc uniforme sur tout fermé borné (compact) de $]2k\pi;(2k+2)\pi[\ \ \forall k\in\mathbb{Z}$.
- Si $x = 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, alors la série $\sum u_n e^{inx}$ est la série numérique $\sum u_n$.
- Etant donné la périodicité, il suffit souvent de travailler dans un intervalle de longueur 2π. Généralement, le plus simple est $[0;2\pi]$.

Démonstration

Remarquons d'abord que $\sum_{k=0}^{p} u_k \cos kx = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{p} u_k e^{ikx}\right)$ et que $\sum_{k=1}^{p} u_k \sin kx = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{p} u_k e^{ikx}\right)$.
La convergence de la série $\sum u_n e^{inx}$ implique donc celle des deux autres.

Si $x = 2j\pi$ avec $j\in\mathbb{Z}$, $\left|\sum_{k=0}^{p} e^{ikx}\right| = p+1$.
Si $x = (2j+1)\pi$ avec $j\in\mathbb{Z}$, $\left|\sum_{k=0}^{p} e^{ikx}\right| = \left|\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\right| = 1$ si p est pair et $\left|\sum_{k=0}^{p} e^{ikx}\right| = 0$ si p est impair.
Si, $\forall j\in\mathbb{Z}$, $x \neq j\pi$, alors $\left|\sum_{k=0}^{p} e^{ikx}\right| = \left|\frac{e^{i(p+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right| = \left|\frac{e^{i(p+1)x/2}}{e^{ix/2}} \times \frac{e^{i(p+1)x/2}-e^{-i(p+1)x/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\right| = \left|e^{ipx/2} \times \frac{\sin\frac{(p+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|$.

$$\leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|.$$

Si $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, nous sommes donc dans les hypothèses de la règle d'Abel et la série $\sum u_n e^{inx}$ converge.

Remarquons maintenant que, si $x\in[2k\pi+\alpha;(2k+2)\pi-\alpha]$, alors $\frac{x}{2}\in[k\pi+\frac{\alpha}{2};(k+1)\pi-\frac{\alpha}{2}]$ et $\sin\frac{x}{2} \geq \sin\frac{\alpha}{2}$.
Donc $\left|\sum_{k=0}^{p} e^{ikx}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right|$. Si on pose $S_n^{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e^{ikx}$, en utilisant la substitution d'Abel, on obtient $|S_n^p| \leq 2u_{n+1} \times \left|\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right|$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on en déduit que, pour tout réel ε, on peut trouver un entier N tel que, $\forall p \geq 0$, si $n \geq N$ alors $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e^{ikx}\right| < \varepsilon$ et ceci pour tout $x\in[2k\pi+\alpha;(2k+2)\pi-\alpha]$.

Exemples 2.7

- La série $\sum \frac{\cos nx}{n}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et elle diverge pour $x = 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.
- La série $\sum \frac{\sin nx}{n}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$.
  En effet, si $x = 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, cette série est la série nulle.

Corollaire 2.8

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ trois suites complexes.
On considère une série trigonométrique des formes équivalentes (1) ou (2).
Si les suites de terme général c_n et c_{-n} (pour $n \geq 0$) sont des suites de nombres positifs, décroissantes et qui tendent vers 0. Alors les séries trigonométriques $\sum(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ ou $\sum(c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int})$ sont simplement convergentes sur tout intervalle de la forme $]2k\pi;(2k+2)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$.
De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha;(2k+2)\pi-\alpha]$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ vérifie $0 < \alpha < \pi$.

3. Somme d'une série trigonométrique et opérateurs

Corollaire 3.1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ trois suites complexes.

a. Si la série de terme général $|c_n|+|c_{-n}|$ (pour $n \geq 0$) est convergente alors la somme de la série trigonométrique $\sum(c_n e^{int}+c_{-n}e^{-int})$ est continue sur $\mathbb{R}$.

a'. Si la série de terme général $|a_n|+|b_n|$ (pour $n \geq 0$) est convergente alors la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Si les suites de terme général c_n et c_{-n} (pour $n \geq 0$) sont des suites de nombres réels positifs, décroissantes et qui tendent vers 0, alors la somme de la série $\sum(c_n e^{int}+c_{-n}e^{-int})$ est continue sur tout intervalle de la forme $]2k\pi;(2k+2)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$.

b'. Si les suites de terme général a_n et b_n (pour $n \geq 0$) sont des suites de nombres positifs, décroissantes et qui tendent vers 0, alors la somme de la série $\sum(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est continue sur tout intervalle de la forme $]2k\pi;(2k+2)\pi[$ où $k\in\mathbb{Z}$.

c. Si les séries $\sum n c_n$ et $\sum n c_{-n}$ sont absolument convergentes (il en est de même des séries $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$) alors $\sum\limits_{n\geq 0}(c_n e^{int}+c_{-n}e^{-int})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\sum\limits_{n\geq 0}(inc_n e^{int}-inc_{-n}e^{-int})$.

c'. Si les séries $\sum n a_n$ et $\sum n b_n$ sont absolument convergentes alors $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\sum\limits_{n\geq 0}(-na_n \sin nt + nb_n \cos nt)$.

d. Si les séries $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes, alors, pour tout réel x, la série $\sum \int_0^x (c_n e^{int}+c_{-n}e^{-int})\mathrm{d}t$ converge vers $\int_0^x \sum\limits_{n\geq 0}(c_n e^{int}+c_{-n}e^{-int})\mathrm{d}t$.

d'. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors, pour tout réel x, la série $\sum \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\int_0^x \sum\limits_{n\geq 0}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 3.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul R et de somme $S(z)$.
Alors, $\forall r\in]0;R[$, la série trigonométrique $\sum a_n r^n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $S(re^{ix})$.

Démonstration

Pour tout réel x, $|a_n r^n e^{inx}| \leq |a_n r^n|$ et la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.
De plus, on a $r^n e^{inx} = (re^{ix})^n$.

Remarque 3.3

On peut ainsi former des séries trigonométriques dont la somme est connue et dont on peut séparer la partie imaginaire et la partie réelle.

Exemple 3.4

Pour tout complexe z tel que $|z|<1$, on a $\dfrac{1+z}{1-z} = 1+2z\dfrac{1}{1-z} = 1+2z\sum\limits_{n\geq 0} z^n = 1+2\sum\limits_{n\geq 1} z^n$.

En remplaçant z par $r\,e^{ix}$ avec $r\in]0;1[$ et $x\in\mathbb{R}$, on obtient $\dfrac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} = 1+2\sum\limits_{n\geq 1} r^n e^{inx}$.

De plus, $\dfrac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} = \dfrac{1+r\cos x+ir\sin x}{1-r\cos x-ir\sin x} = \dfrac{(1+r\cos x+ir\sin x)(1-r\cos x+ir\sin x)}{(1-r\cos x-ir\sin x)(1-r\cos x+ir\sin x)}$

$$= \frac{(1+ir\sin x)^2-r^2\cos^2 x}{(1-r\cos x)^2+r^2\sin^2 x} = \frac{1-r^2+2ir\sin x}{1+r^2-2r\cos x}.$$

On a donc : $1+2\sum_{n\geq 1} r^n \cos nx = \mathrm{Re}\left(1+2\sum_{n\geq 1} r^n e^{inx}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}$ et

$$1+2\sum_{n\geq 1} r^n \sin nx = \mathrm{Im}\left(1+2\sum_{n\geq 1} r^n e^{inx}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}\right) = \frac{2r\sin x}{1+r^2-2r\cos x}.$$

4. Développement en série trigonométrique

Propriété 4.1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ trois suites complexes.
On considère une série trigonométrique des formes équivalentes (1) ou (2).
Si cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et si S est sa somme i.e $S(x) = \sum_{n\geq 0}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})\ \forall x\in\mathbb{R}$,

alors on a : a. $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\ \ \forall k\in\mathbb{Z}$.

b. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\,\mathrm{d}t$

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ si $k \geq 1$.

c. $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$.

Remarque 4.2

On peut remplacer les intégrales de 0 à 2π par des intégrales de a à $a + 2\pi$ quel que soit le réel a.
En effet, si g est une fonction 2π-périodique intégrable sur $\mathbb{R}$, en utilisant le changement de variable $u = t - 2\pi$, pour tout réel a, on a $\int_{2\pi}^{2\pi+a} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a g(u)\,\mathrm{d}u$.

Donc $\int_a^{2\pi+a} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{2\pi+a} g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

a. Remarquons en premier lieu que, pour tout couple d'entiers relatifs (p,q), on a :

Si $p = -q$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ipt}e^{iqt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

Si $p \neq -q$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ipt}e^{iqt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} e^{i(p+q)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{p+q}e^{i(p+q)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{p+q} - \frac{1}{p+q} = 0$.

Si $S(x) = \sum_{n\geq 0}(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx})$, alors, pour tout entier relatif k, $S(x)e^{-ikx} = \sum_{n\geq 0}(c_n e^{inx}e^{-ikx} + c_{-n}e^{-inx}e^{-ikx})$.

$$\text{Donc, } \int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 0}(c_n e^{inx}e^{-ikx} + c_{-n}e^{-inx}e^{-ikx})\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0}\int_0^{2\pi}(c_n e^{inx}e^{-ikx} + c_{-n}e^{-inx}e^{-ikx})\,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n\geq 0}\left(c_n\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + c_{-n}\int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right) = c_k\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_k.$$

b. $a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\,\mathrm{d}t$.

$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\frac{e^{it}+e^{-ikt}}{2}\,\mathrm{d}t$ si $k \geq 1$.

c. $b_k = (c_k - c_{-k})i = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\frac{e^{it}-e^{-ikt}}{2i}\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 4.3

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ trois suites complexes.
On considère une série trigonométrique des formes équivalentes (1) ou (2).
On suppose que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et que S est sa somme.
Si S est paire, alors $b_n = 0$ et $c_{-n} = c_n$ pour tout entier n.
Si S est impaire, alors $a_n = 0$ et $c_{-n} = -c_n$ pour tout entier n.

Démonstration

D'après la remarque, en prenant $a = -\pi$, on obtient $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$ et $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ si $k \geq 1$.
Si S est paire, la fonction $t \mapsto S(t)\sin kt$ est impaire donc $b_k = 0$.
Si S est impaire, la fonction $t \mapsto S(t)\cos kt$ est impaire donc $a_k = 0$.

5. Séries de Fourier

Définition 5.1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux.
On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique des formes équivalentes (1) ou (2) dont les coefficients (appelés coefficients de Fourier de f) vérifient :

a. $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

b. $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$

$a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ si $k \geq 1$.

c. $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$.

Remarque 5.2

Les problèmes qui se posent à nous sont les suivants :
- Etant donné un réel x_0, la série de Fourrier d'une fonction f converge-t-elle en x_0?
- Si oui, quel rapport y-a-t-il entre la somme de la série et $f(x_0)$?

Lemme 5.3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux.
Les coefficients de Fourier de f vérifient : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{-n} = 0$.
Plus généralement, $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{|\lambda|\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{|\lambda|\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$.

Notation 5.4

Si les limites existent, on note $f(t_0+0) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}} f(t)$ et $f(t_0-0) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t)$.

Propriété 5.5 Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceaux.
Si les limites $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$ existent et sont finies, alors la série de Fourier de f converge en x_0 et a pour somme $\dfrac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$ en ce point.

Remarque 5.6

En particulier, si f est dérivable en x_0, alors la série de Fourier de f converge vers $f(x_0)$ au point x_0.

Démonstration

Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f.
On pose

$$\begin{aligned}[S_p(f)](x_0) &= \sum_{k=-p}^{p} c_k e^{ikx_0} = \sum_{k=-p}^{p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx_0} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-p}^{p} f(t)e^{-ikt}e^{ikx_0}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-p}^{p} e^{-ik(t-x_0)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $u = t - x_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}[S_p(f)](x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{2\pi+x_0} f(u+x_0)\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x_0)\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku}\,\mathrm{d}u \qquad \text{car } u\mapsto f(u+x_0)\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku} \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}\end{aligned}$$

Si $u = 2j\pi$ avec $j\in\mathbb{Z}$, alors $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku} = 2p+1$.

Si $u \neq 2j\pi$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, alors $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku} = e^{-ipu}\sum_{k=0}^{2p} e^{-iku} = e^{-ipu}\times e^{ipu}\times\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} = 2p+1$.

L'application $u\mapsto\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku}$ est une fonction paire continue en 0 et donc sur $[-\pi;\pi]$.

On a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku}\,\mathrm{d}u &= \sum_{k=-p}^{p}\int_0^{\pi} e^{-iku}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=-p}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku + i\sin ku\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=-p}^{-1}\int_0^{\pi}\cos ku + i\sin ku\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku + i\sin ku\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos(-ku) + i\sin(-k)u\,\mathrm{d}u + \pi + \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku + i\sin ku\,\mathrm{d}u \\ &= \pi + \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku - i\sin ku\,\mathrm{d}u + \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku + i\sin ku\,\mathrm{d}u \\ &= \pi + \sum_{k=1}^{p}\int_0^{\pi}\cos ku\,\mathrm{d}u \\ &= \pi + \sum_{k=-p}^{p}\left[\frac{1}{k}\sin ku\right]_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

En particulier, $\displaystyle 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-p}^{p} e^{-iku}\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u$.

$$[S_p(f)](x_0) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\times 2\pi\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u)\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x_0+u) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\right)\times\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x_0+u)-f(x_0-0)}{2}\right)\times\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{2}\right)\times\frac{\sin\frac{(2p+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u\right]$$

Or, d'après le lemme, $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0+u)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{u}{2}}\times\sin\frac{(2p+1)u}{2}\,\mathrm{d}u = 0$.

Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}[S_p(f)](x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Propriété 5.7 Théorème de Parseval

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $[-\pi;\pi]$.
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les suites complexes des coefficients de Fourier de f.
Alors : $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t = 2\pi|c_0|^2 + 2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n|^2+|c_{-n}|^2) = 2\pi|a_0|^2 + \pi\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)$.