Chapitre 3 : Suites

F. Wlazinski

26th September 2003

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons essentiellement aux suites réelles. Toutefois certaines définitions et propriétés sont généralisables aux suites à valeurs dans d'autres ensembles.

1 Suites d'éléments d'un ensemble quelconque

Définition 1.1

Soit E un ensemble.
Une *suite* d'éléments de E est une application u de $\mathbb{N}$ dans E.
L'image par u de l'entier n n'est plus notée $u(n)$ mais u_n. Elle est appelée *terme d'indice* n, ou *terme général*, de la suite u, et u_0 en est le *terme initial*. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarques 1.2

- On parle de *suite réelle* si $E = \mathbb{R}$ et de *suite complexe* si $E = \mathbb{C}$.
- On note parfois $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
- On peut aussi considérer une suite comme une famille d'éléments de E indicée par $\mathbb{N}$.
- On pourrait, pour les suites, considérer non plus les applications mais les fonctions de $\mathbb{N}$ dans E.
  En particulier, on parle de suite définies à partir d'un certain rang n_0.
  Les définitions et propriétés qui vont suivre seront données pour des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, mais elles peuvent être adaptées aux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$, avec simplement des changements de notation.
- La donnée d'une suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ équivaut à celle de deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = u_n + iv_n$, c'est-à-dire $u_n = Re(z_n)$ et $v_n = Im(z_n)$.

Définition 1.3

Soient u et v deux suites de E. On a $u = v \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.

Remarque 1.4

On ne confondra pas la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs et l'élément u_n.
Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ sont distinctes, mais elles ont le même ensemble de valeurs $\{-1, 1\}$.

2 Suites extraites

Propriété 2.1

Soit φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$.

Définition 2.2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un ensemble E.
On appelle *suite extraite* de la suite u toute suite v de E dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarques 2.3

- Si $\varphi(n) = n + p$ ($p \in \mathbb{N}$), la suite v est $(u_n)_{n \geq p}$ (son terme initial est u_p).
- La suite extraite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est la suite des termes d'indices pairs : $\varphi(n) = 2n$,
- La suite extraite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est la suite des termes d'indices impairs : $\varphi(n) = 2n + 1$.

3 Suites périodiques ou stationnaires

Définition 3.1

Soit u une suite réelle.

- On dit que u est *constante* s'il existe a dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a$.
- On dit que u est *stationnaire* s'il existe a dans $\mathbb{R}$ et n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geq n_0,\ u_n = a$.

Définition 3.2

Soit u une suite réelle.
On dit que u est *périodique* s'il existe un entier positif p tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
Si un entier p satisfait à cette propriété, tous ses multiples y satisfont aussi.
La période de la suite u est alors l'entier positif minimum p_0 qui vérifie cette propriété.
On dit alors que la suite u est p_0-*périodique*.

Remarques 3.3

- Les suites constantes sont les suites 1-périodiques.
- Par abus, on note $u = a$ où u est une suite et $a \in \mathbb{R}$ pour exprimer que u est une suite constante dont chacun des termes est égal à a.
- Si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est p-périodique, alors :
$\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n, n \in [0, p-1]\} = \{u_n, n \in [n_1, n_1 + p - 1]\}$.

4 Suites définies par récurrence

Définition 4.1

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et soit a un réel.
On peut définir une suite u par :
La donnée de son terme initial $u_0 = a$.
La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
On dit alors que la suite u est définie *par récurrence*.

Remarque 4.2

Dans le cas où f n'est définie que sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, il est nécessaire de vérifier (pour assurer l'existence de la suite u) que a appartient à $\mathcal{D}$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \in \mathcal{D} \Rightarrow u_{n+1} \in \mathcal{D}$ (il suffit pour celà d'établir la *stabilité* de $\mathcal{D}$ par f).

Exemple 4.3

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.
Pour que cette suite ait un sens il faut en particulier que u_1 existe, c'est-à-dire $u_0 \leq 1$.
Mais pour que u_2 existe il faut $u_1 = \sqrt{1 - u_0} \leq 1$, c'est-à-dire $u_0 \geq 0$.
La condition $0 \leq u_0 \leq 1$ est suffisante pour assurer l'existence de la suite u, car l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f(x) = \sqrt{1 - x}$.

Remarque 4.4

On peut également définir des suites par des récurrences de pas 2 (ou supérieur), c'est-à-dire en se donnant les deux termes initiaux u_0 et u_1 et une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

où f est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

5 Généralités sur les suites réelles

Définition 5.1

Soient u et v deux suites réelles et soit λ un réel.
On définit la suite somme $s = u+v$ et la suite produit $p = uv$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = u_n+v_n$, et $p_n = u_n v_n$.
On définit la suite λu par $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda u_n$.

Remarques 5.2

• Autrement dit, la suite $u + v$ est la suite de terme général $u_n + v_n$, la suite $u \times v$ est la suite de terme général $u_n \times v_n$. et la suite λu est la suite de terme général λu_n.
• Ces définitions sont les mêmes que pour les fonctions.

Définition 5.3

Soit u une suite de nombres réels. On dit que u est :
croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.
strictement monotone si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques 5.4

• u croissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$.
• u décroissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$.
• u strictement croissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n \Rightarrow u_m < u_n$
• u strictement décroissante $\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n \Rightarrow u_m > u_n$.

Définition 5.5

Soit u une suite réelle.
On dit que la suite u est *majorée* si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
On dit que la suite u est *minorée* si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
On dit que la suite u est *bornée* si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques 5.6

• u est majorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble de ses valeurs est majoré dans $\mathbb{R}$.
• u est minorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble de ses valeurs est minoré.
• Une suite réelle u est bornée si et seulement si il existe un réel $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.
• Les suites constantes, stationnaires ou périodiques, sont des suites bornées parce qu'elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.
• Notons $-u$ la suite de terme général $-u_n$. Pour les deux suites u et $-u$:
L'une est minorée $\Leftrightarrow$ l'autre est majorée
L'une est croissante $\Leftrightarrow$ l'autre est décroissante.
L'une est strictement croissante $\Leftrightarrow$ l'autre est strictement décroissante.
Cette remarque permet de se ramener à des suites croissantes et/ou majorées.

6 Suites arithmétiques ou géométriques

Définition 6.1

Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *arithmétique* s'il existe un réel r tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé *raison* de la suite arithmétique. Il est défini de façon unique.

Remarques 6.2

- La suite u est constante si $r = 0$.
- u est strictement croissante si $r > 0$, strictement décroissante si $r < 0$.
- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, et plus généralement : $\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n-p)r$.
- Réciproquement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit $u_n = a + nb$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison b.

Propriété 6.3

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

Définition 6.4

On dit que trois réels a, b, c sont en *progression arithmétique* s'ils sont des termes successifs d'une suite arithmétique : cela équivaut à dire que $a + c = 2b$.

Propriété 6.5

La somme des n premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ arithmétique de raison r est :
$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = nu_0 + \frac{n(n-1)}{2}r = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1})$.

Remarque 6.6

Plus généralement, la somme de n termes successifs est $\displaystyle\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k = \frac{n}{2}(u_m + u_{m+n-1})$.

Définition 6.7

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *géométrique* s'il existe un réel q tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.
Le réel q est appelé *raison* de la suite géométrique (il est défini de façon unique, à moins que u_0 ne soit nul, auquel cas la suite u est identiquement nulle, ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt).

Remarques 6.8

- La suite u est constante si $q = 1$; elle est stationnaire en 0 (à partir de $n = 1$) si $q = 0$.
- Si $q > 0$, la suite u garde un signe constant et est monotone. Plus précisément :
  Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, la suite u est positive strictement croissante.
  Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est positive strictement décroissante.
  Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, la suite u est négative strictement décroissante.
  Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, la suite u est négative strictement croissante.
- Si $q < 0$, alors pour tout n les termes u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. La suite u n'est donc pas monotone.
- Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$, et plus généralement : $\forall n, p \in \mathbb{N},\ p \leq n \ \Rightarrow\ u_n = u_p q^{n-p}$.
- Réciproquement, si le terme général d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit $u_n = aq^n$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q.

Propriété 6.9

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n\, u_{n+2} = u_{n+1}^2$.

Définition 6.10

On dit que trois réels a, b, c sont en *progression géométrique* s'ils sont des termes successifs d'une suite géométrique: cela équivaut à dire que $ac = b^2$.

Propriété 6.11

La somme des n premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ géométrique de raison q est :

- Si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$.
- Si $q = 1$, $S_n = n u_0$.

Remarque 6.12

Plus généralement, si $q \neq 1$, la somme de n termes successifs est : $\sum_{k=m}^{m+n-1} u_k = u_m \frac{1-q^n}{1-q}$.

Définition 6.13

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite *arithmético-géométrique* si : $\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b$.

Remarques 6.14

- Si $b = 0$, c'est une suite géométrique. Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique.
- Supposons $a \neq 1$: soit α l'unique réel vérifiant $\alpha = a\alpha + b$ (donc $\alpha = \frac{b}{a-1}$). Alors la suite de terme général $u_n - \alpha$ est géométrique de raison a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$. On en déduit l'expression générale de u_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.

7 Suites, fonctions et limites

Propriété 7.1

Soit f une fonction réelle dérivable sur $[0, +\infty[$. Soit u la suite définie par $u_n = f(n)$.
- Si $f' \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors u est croissante.
- Si $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors u est décroissante.

Remarque 7.2

La réciproque est fausse.
Par exemple, si on prend la suite u définie par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x \cos 2\pi x$.
On a $u_n = n \cos 2\pi n = n$. La suite u est donc croissante.
Et pourtant $f'(x) = \cos 2\pi x - 2\pi x \sin 2\pi x$ n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$.
En effet, on a $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$ et $f'(2) = 1$.

Définition 7.3

- On dit qu'une suite u converge vers l fini si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.
- On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ si et seulement si $\forall A > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A$.
On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- On dit qu'une suite u tend vers $-\infty$ si et seulement si $\forall A < 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n < A$.
On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Remarques 7.4

- $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ (fini) $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n - l = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0$
- Si une suite n'admet pas de limite quand n tend vers l'infini, on dit qu'elle diverge.

Propriété 7.5

La limite d'une suite est unique.

Démonstration

Remarquons d'abord que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; l-1 < u_n - l < l+1$. Une suite ne peut donc pas à la fois converger vers un réel et tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.
De même, une suite ne peut à la fois tendre vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
Donc, il ne nous reste plus qu'à traiter le cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l'$.
On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |u_n - l| < \varepsilon$.
$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_2 \;\Rightarrow\; |u_n - l'| < \varepsilon$.
Donc $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq \max\{n_1, n_2\},\; |l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < 2\varepsilon$.
Donc $l = l'$. □

Propriété 7.6

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (fini) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |l|$.

Remarque 7.7

La réciproque est fausse. Par exemple, il suffit de prendre la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Démonstration

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0,\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |u_n - l| < \varepsilon$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = |l| \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0,\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; ||u_n| - |l|| < \varepsilon$.
Or $\forall x, y \in \mathbb{R},\; ||x| - |y|| \leq |x - y|$ donc $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$. □

Propriété 7.8

Une suite convergent vers l fini est bornée.

Démonstration

On suppose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
Donc $\forall \varepsilon > 0,\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |u_n - l| < \varepsilon$.
En particulier, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \;/\; n \geq n_1 \;\Rightarrow\; l - 1 < u_n < l + 1$.
Soient $m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_1}\} \cup \{l-1\}$ et $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_1}\} \cup \{l+1\}$.
On a bien $\forall n \in \mathbb{N},\; m \leq u_n \leq M$.

□

Propriété 7.9

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ (fini) et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$ (fini) et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors :
$u + v$ converge vers $l + l'$ et $u \times v$ converge vers $l \times l'$.
λu converge vers λl.
Si $l \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$ et si $l' \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Propriété 7.10

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Alors :

- $\dfrac{1}{v}$ converge vers 0.
- Si u est minorée alors $u + v$ tend vers $+\infty$.
- Si u est minorée par un nombre strictement positif alors $u \times v$ tend vers $+\infty$.

Propriété 7.11

Si u converge vers 0 et si $u_n > 0\; \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{1}{u}$ tend vers $+\infty$.

Remarque 7.12

- Attention, si u s'annule pour un entier n_0, alors on ne peut pas considérer la suite $\frac{1}{u}$.
- Si u converge vers 0 et si $u_n < 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ alors $\frac{1}{u}$ tend vers $-\infty$.

Les conclusions des 2 propriétés suivantes et du corollaire restent vraies si les hypothèses sont vérifiés seulement à partir d'un certain rang.

Propriété 7.13

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq v_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Alors :
- Si u tend vers $+\infty$ alors v tend vers $+\infty$.
- Si v tend vers $-\infty$ alors v tend vers $-\infty$.
- Si v converge vers l fini alors u est majorée.

Corollaire 7.14

Soit u une suite réelle qui converge vers l et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n > 0$. Alors on a : $l \geq 0$.

Remarques 7.15

- Attention, lorsque l'on passe à la limite, on perd souvent les inégalités strictes pour des inégalités larges.
Par exemple, si u est la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n > 0$ et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 = l$.
- On a une propriété similaire en considérant deux suites réelles u et v vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n < v_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$. On obtient alors $l \leq l'$.
Par exemple, si u et v sont les suites de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\; u_n < v_n$ et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Propriété 7.16

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq w_n \leq v_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Si u et v convergent vers la même limite, il en est de même de w.

Remarque 7.17

Le résultat reste vrai si l'inégalité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Propriété 7.18

Soit u une suite croissante.
- Si u est majorée alors u converge vers un réel.
- Si u n'est pas majorée alors u tend vers $+\infty$.

Soit u une suite décroissante.
- Si u est minorée alors u converge vers un réel.
- Si u n'est pas minorée alors u tend vers $-\infty$.

Propriété 7.19

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ (resp. $-\infty$, $+\infty$) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$ (resp. $-\infty$, $+\infty$).

Remarque 7.20

Attention, la réciproque est fausse. Par exemple : $u_n = (-1)^n$.

Propriété 7.21

Soit f une fonction strictement croissante sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit u une suite de I définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :
- Si $u_1 > u_0$, u est strictement croissante.
- Si $u_1 < u_0$, u est strictement décroissante.

Remarque 7.22

- Ne pas confondre $u_n = f(n)$ et $u_n = f(u_{n-1})$.
- f "conserve" les ordres $u_1 > u_0 \Rightarrow f(u_1) > f(u_0) \Rightarrow u_2 > u_1$.
- On ne peut rien dire avec f une fonction décroissante.

Propriété 7.23

Soit f une fonction continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit u une suite de I définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si u converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque 7.24

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Définition 7.25

Soient u et v deux suites réelles.
On dit que u et v sont adjacentes si et seulement si :
- u est croissante.
- v est décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Propriété 7.26

Deux suites adjacentes convergent vers la mme limite $l \in \mathbb{R}$ qui vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$.