Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Licence 2 : Algèbre linéaire

Td 1 **1er semestre** **2007-2008**

Exercice 1

Soient a et b deux réels.
Soit $F = \{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \ / f'' + af' + bf = 0 \}$.
Montrer que F muni de la somme usuelle des fonctions et du produit usuel d'une fonction par un scalaire est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 2

Soit $I = [-1,1]$ l'intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur I.

1. Soit E_1 l'ensemble des fonctions constantes sur I
   Montrer que E_1 est un s.e.v. de E.
2. Soit E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$.
   Montrer que E_2 est un s.e.v. de E.
3. Soit E_3 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_{-1}^{1} f(x)\sin(\pi x)\,dx = 0$.
   Montrer que E_3 est un s.e.v. de E.
4. A-t-on $E = E_1 + E_2$? $E = E_1 \oplus E_2$?
5. A-t-on $E = E_1 + E_3$? $E = E_1 \oplus E_3$?

Exercice 3

Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. d'un K-e.v. E.
A quelles conditions $E_1 \cup E_2$ est-il un s.e.v. de E?

Exercice 4

Soit E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ muni des lois produits usuelles.
Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to E \\ (P,Q) \to (P' + P'', Q' + Q'') \end{array}$ où P' et P'' sont les dérivées première et seconde de P. (De même pour Q)
est un endomorphisme de E.

Exercice 5

L'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \int_0^1 P(t) + (t+1)P'(t)\,dt = 0\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$?

Francis Wlazinski

Exercice 6

Soient E et F deux K-e.v où K est un corps commutatif.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit A une partie de E.
Montrer que $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.

Exercice 7

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. et soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -\text{Id}$.
Soient $V = \{x \in E \,/\, f(x) = ix\}$ et $W = \{x \in E \,/\, f(x) = -ix\}$.

1. Montrer que V et W sont des s.e.v. de E.
2. Montrer que V et W sont supplémentaires dans E.
   (On pourra supposer qu'un élément de E peut s'écrire comme un élément de V et d'un élément de W, déterminer les formes que ces derniers doivent avoir puis vérifier que le résultat convient)

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.
Soit u un élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = \text{Id}_E$.

1. Montrer que les applications f et g définies par $f(x) = \dfrac{x+u(x)}{2}$ et $g(x) = \dfrac{x-u(x)}{2}$ sont des endomorphismes de E.
2. Soient $E_1 = f(E)$ et $E_2 = g(E)$.
   Montrer que, $\forall y \in E_1$, $u(y) = y$ et que, $\forall y \in E_2$, $u(y) = -y$.

Exercice 9

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x',y') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{2} \\ y' = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases} .$$

1. Déterminer $\text{Ker}\,\varphi$, $\text{rg}\,\varphi$ et $\text{Im}\,\varphi$.
2. Montrer que $\text{Ker}\,\varphi$ et $\text{Im}\,\varphi$ sont supplémentaires.
3. Montrer que si $u \in \text{Im}\,\varphi$, alors $\varphi(u) = u$. En déduire une interprétation géométrique de φ.

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.
Soit f un endomorphisme de E.
Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $E = \text{Ker}\,f \oplus \text{Im}\,f$.
(ii) $\text{Im}\,f^2 = \text{Im}\,f$.
(iii) $\text{Ker}\,f^2 = \text{Ker}\,f$.