



#### Exercice 1

Soit  $E$  un e.v. réel non réduit à  $\{0\}$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f \circ f = -\text{Id}_E$ .

Montrer que :  $\forall a \in E \quad a \neq 0$ , la famille  $\{a, f(a)\}$  est libre.

#### Exercice 2

Soit  $r$  un réel non nul.

1. Montrer que l'ensemble  $G$  des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = r u_n$  est une droite vectorielle sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $b$  la suite de  $G$  définie par  $b = (1, r, r^2, r^3, \dots) = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
Quelle est la coordonnée de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans la base  $\{b\}$ ?

#### Exercice 3

Soit  $\varphi$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -e.v.  $E$ .

Soit  $\lambda$  un réel, on considère l'ensemble  $E_\lambda = \{u \in E / \varphi(u) = \lambda u\}$

1. Montrer que, quelque soit le réel  $\lambda$ ,  $E_\lambda \neq \emptyset$ .
2. Montrer que, quelque soit le réel  $\lambda$ ,  $E_\lambda$  est un s.e.v de  $E$ .
3. Expliciter  $E_0$  et déterminer  $E_\lambda \cap E_\mu$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels distincts.

#### Exercice 4

Soit  $E$  un  $K$ -e.v. non nul. Soit  $u$  un élément de  $\mathcal{L}(E)$ .

On suppose que  $\forall x \in E, \exists \alpha \in K / u(x) = \alpha x$  (càd  $u(x)$  et  $x$  colinéaires ou linéairement dépendants)

Montrer que  $u$  est une homothétie vectorielle.

#### Exercice 5

Soit  $E$  un  $K$ -e.v. où  $K$  est un corps. Soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

1. Montrer que  $A \subset B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$
2. a. Montrer que  $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ .  
b. Donner un exemple montrant que l'on a pas nécessairement l'égalité.

#### Exercice 6

Soit  $F$  le sous espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les 3 fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$f_1(x) = \cos 2x \cos x, f_2(x) = \sin 2x \sin x$  et  $f_3(x) = \cos x$ .

Quelle est la dimension de  $F$ ?

### Exercice 7

Soit  $E$  un e.v. réel. On note  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ . Soit  $s$  un endomorphisme involutif de  $E$  c'est-à-dire  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

Le but de cet exercice est de montrer que :  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = E$

1.
  - a. Vérifier que  $u \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(u) = u$  c'est-à-dire  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Inv}(s)$ .
  - b. Vérifier que  $v \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(v) = -v$  c'est-à-dire  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \text{Opp}(s)$ .
  - c. Déterminer  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .
2.
  - a. Soit  $x \in E$  et supposons qu'il existe  $u \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $v \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  tels que  $x = u + v$ . Trouver  $u$  et  $v$  en fonction de  $x$  et  $s(x)$ .
  - b. Vérifier que les  $u$  et  $v$  ainsi obtenus sont respectivement dans  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .
  - c. En déduire que  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = E$ .
3. Exemple :  $E = \mathbb{R}^2$  et  $\varphi : (x, y) \mapsto (y, x)$   
Vérifier que  $\varphi^2 = \text{Id}_E$ , déterminer  $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ ,  $\text{Ker}(\varphi + \text{Id}_E)$  et conclure.

### Exercice 8

Soit  $E$  un e.v. sur  $\mathbb{R}$  de dimension finie  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Pour tout entier  $k \geq 2$ , on définit  $u^0 = \text{Id}$ ,  $u^1 = u$  et  $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$  ( $k$  fois).

On suppose que  $u$  est nilpotent d'ordre  $p$  :  $p$  est le plus petit entier tel que  $u^p = 0$ .

1. Soit  $x \in E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ .  
Montrer que la famille  $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  est libre.
2. En déduire que  $u^n = 0$ .

### Exercice 9

Soit  $p$  un projecteur non nul d'un  $K$ -e.v.  $E$  et soit  $\lambda \in K$ .

Montrer que  $\text{Id} + \lambda p$  est injectif si et seulement si  $\lambda \neq -1$ .

### Exercice 10

Soit  $f$  un endomorphisme d'un  $K$ -e.v.  $E$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $\text{Ker} f^n \subset \text{Ker} f^{n+1}$  (rappel  $f^0 = \text{Id}_E$ ).
2. Montrer que, si  $\text{Ker} f^q = \text{Ker} f^{q+1}$  pour un certain  $q$ , alors  $\text{Ker} f^p = \text{Ker} f^{p+1}$  pour tout  $p \geq q$ .