



Exercice 1

Soit \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $(e) = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice associée dans la base (e) est :

$$\mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\text{rg}(A)$ et donner une base de $\text{Im } f$.
2. Déterminer $\text{Ker } f$.
3. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e) = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Donner une base du s.e.v. $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
2. Donner une base du s.e.v. $G = \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.
3. Vérifier que $E = F \oplus G$.

Exercice 3

Soit \vec{P} le plan vectoriel orienté et (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base orthonormale directe.

1. Déterminer la matrice A_θ associée à la rotation R_θ d'angle θ .
(On pourra vérifier qu'une rotation est bien une application linéaire)
2. Déterminer la matrice de $R_\theta \circ R_{\theta'}$ et retrouver les formules de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$.

Exercice 4

Soit (e) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit F le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation : $-x + y - 3z = 0$.

Soit G le sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation : $y = 0$ et $z = -x$.

1. Donner une base (b_1, b_2) de F .
2. Donner une base (b_3) de G .
3. Montrer que $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
4. Donner la matrice dans la base (b) de f la projection sur F parallèlement à G dans \mathbb{R}^3 .
5. Donner la matrice de f dans la base (e) .

Exercice 5

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 5\}$ muni de la base canonique $(e) = (X^5, X^4, X^3, X^2, X, 1)$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P) = \text{reste de la division euclidienne de } P \text{ par } B = X^3 + X + 1$.

1. Déterminer $\mathcal{M}_e(f)$.
2. Donner une base de $\text{Ker } f$.
3. Déterminer $\text{Im } f$ et $\text{rg}(f)$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 3.

Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ défini par $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1. Soit $u \in E$, déterminer $f(u)$ en fonction des coordonnées de u .
2. Calculer f^3 .
3. On pose $F = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)$.
 - a. Déterminer une base de F .
 - b. Déterminer une base de G .
 - c. Montrer que $E = F \oplus G$.
 - d. Montrer que $f(F) = F$.
 - e. Montrer que $f(G) = G$.

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est : $\mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois vecteurs non nuls u_1, u_2 et u_3 tels que $f(u_1) = u_1, f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = 3u_3$.
2. Montrer que $(u) = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. Donner $\mathcal{M}_u(f)$ et $\mathcal{M}_u(f \circ f)$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient p et q deux projecteurs de E . Soit u un endomorphisme de E .

1. Montrer que u et p commutent si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par u .
2.
 - a. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$.
 - b. Montrer que si $p + q$ est un projecteur alors p et q commutent.
 - c. En déduire que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. On suppose que $p + q$ est un projecteur.
 - a. Montrer que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$ et que $\text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p)$.
 - b. Montrer que $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
 - c. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

Exercice 9

$\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq n\}$

Soit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$$P \mapsto P + P'$$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
2. Quel est le rang de A ? Que peut-on en déduire pour l'équation différentielle $f' + f = q$ où $q \in \mathbb{R}_n[X]$.