Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Licence 2 : Algèbre linéaire

Td 4 **1er semestre** **2007-2008**

Exercice 1

Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix}$.

Exercice 2

Déterminer $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 3

Soient a,b et c des réels. Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 4

Soient a,b,c et d des réels. Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice 5

Soient a,b et c des réels. Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab \\ bc+ca+ab & bc+ca+ab & a^2+b^2+c^2 \\ a^2+b^2+c^2 & bc+ca+ab & bc+ca+ab \end{vmatrix}$.

(Ecrire Δ comme le produit de deux déterminants)

Exercice 6

Soient x,y et z des réels. Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & yx & zx \\ xy & z^2+x^2 & zy \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$.

(Ecrire Δ comme le carré d'un autre déterminant)

Exercice 7

Soient a,b et c des réels. Déterminer $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+a^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Soient E un K-e.v. et f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}_K(E)$).
Soit P le polynôme minimal de f et soit $Q \in K[X]$. On pose $D = \text{pgcd}(P,Q)$.
Montrer que $\text{Ker } Q[f] = \text{Ker } D[f]$.

Exercice 9

Soit E un K-e.v. et soit $f \in \mathscr{L}_K(E)$.
Soient $P,Q \in K[X]$. On pose $D = \text{pgcd}(P,Q)$ et $M = \text{ppcm}(P,Q)$.

1. Montrer que $\text{Ker } P[f] + \text{Ker } Q[f] = \text{Ker } M[f]$.
2. Montrer que $\text{Im } P[f] + \text{Im } Q[f] = \text{Im } D[f]$.
3. Montrer que, si P et Q sont premiers entre eux et si $(PQ)[f] = 0$, alors $\text{Im } P[f] = \text{Ker } Q[f]$, $\text{Im } Q[f] = \text{Ker } P[f]$ et $E = \text{Im } P[f] \oplus \text{Im } Q[f]$.

Exercice 10

Soient E un K-e.v., $f \in \mathscr{L}_K(E)$, $P = X^2$ et $Q = (X-1)^2 \in K[X]$ tels que $(PQ)[f] = 0$.
Déterminer les projecteurs associés à la décomposition $E = \text{Ker } P[f] \oplus \text{Ker } Q[f]$.

Exercice 11

Soit E un K-e.v. et soit $f \in \mathscr{L}_K(E)$.
Montrer que $P(X)$ polynôme minimal de $f \Rightarrow P(X+\lambda)$ polynôme minimal de $f - \lambda \text{Id}_E$.

Exercice 12

Soit E un K-e.v. de dimension finie et soit $f \in \mathscr{L}_K(E)$.
Soit x un vecteur propre associé à λ une valeur propre de f et soit $P \in K[X]$.

1. Montrer que $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(f)$ et que x est un vecteur propre associé à $P(\lambda)$.
2. Montrer que si $P[f] = 0$ alors $P(\lambda) = 0$.
3. Montrer que si $f \in \text{GL}_K(E)$ alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, λ^k est une valeur propre de f^k et que x est un vecteur propre associé à λ^k.
4. Montrer que $\text{Sp}(f^{-1}) = \{\lambda^{-1} \text{ où } \lambda \in \text{Sp}(f)\}$.