Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Mathématiques

Licence 2 : Algèbre linéaire

Td 5 **1er semestre** **2007-2008**

Exercice

Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 3 et $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ défini par $A = \mathscr{M}_e(f)$.
Dans chacun des cas suivants, répondre aux questions suivantes.

a. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
b. En déduire les valeurs propres de A ainsi que leur ordre de multiplicité.
c. Déterminer les sous-espaces propres de A.
d. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
   i. Si oui, trouver une base (b) dans laquelle $\mathscr{M}_b(f)$ est diagonale et donner $\mathscr{P}_{e\to b}$.
   ii. Si non, pour chaque valeur propre λ de f de multiplicité m, déterminer les sous-espaces $\operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^j$ pour j variant de 1 à m. Vérifier les inclusions suivantes (étudier d'éventuelles égalités) : $\{0\} \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^2 \subset .... \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m$

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -15 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$

Francis Wlazinski