



Exercice 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps K .

On suppose que A vérifie $A^3 = A^2 + 4A - 4I_n$.

1. A est-elle inversible. Si oui, déterminer A^{-1} .
2. A est-elle diagonalisable?

Exercice 2

En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient x_1, x_2 et x_3 des fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Résoudre les systèmes suivants :

1.
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_3' = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \end{cases} .$$
2.
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 6x_2 + x_3 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 + 4x_2 + x_3 \end{cases} .$$
3.
$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 1 \\ x_2' = -3x_1 + 4x_2 - 9x_3 + t \\ x_3' = -3x_1 + 3x_2 - 8x_3 + t \end{cases} .$$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & -6 & 6 \\ 36 & 15 & -12 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^{10} .

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $T = P^{-1} A P$.
2. En déduire A^4 .

Exercice 6

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -15 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable? Trouver une matrice triangulaire supérieure semblable à A.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est $\mathcal{M}_e(f)$. Déterminer l'indice de nilpotence de f et déterminer une base de Jordan pour f .

$$1. \quad \mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

$$\text{Soit } f \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{R}^4 \text{ dont la matrice dans la base canonique } (e) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 2 \\ 9 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de Jordan pour f .

Exercice 9

$$\text{Soit } f \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ dont la matrice dans la base canonique } (e) \text{ est } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de Jordan pour f .

2. Soient $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et t une variable réelle. Déterminer $\exp(tB)$.

3. En déduire les solutions du système
$$\begin{cases} x'_1 = -2x_2 + x_3 \\ x'_2 = 3x_2 \\ x'_3 = -x_1 + 10x_2 - 2x_3 \end{cases} \quad \text{où } x_1, x_2 \text{ et } x_3 \text{ sont des fonctions}$$
 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .