



Exercice 1

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel.

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, $u^* \circ u - \text{Id}$ est autoadjoint.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que u normal et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u - \lambda \text{Id}$ normal.

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $H = \frac{M + M^*}{2}$ et $K = i \frac{M - M^*}{2}$.

1. H et K sont-elles hermitiennes?
2. Exprimer M en fonction de H et K .
3. A quelle condition sur M a-t-on l'égalité $HK = KH$?

Exercice 3

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hermitien.

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

1. Montrer qu'il existe g et $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$, g et h autoadjoints tels que $f = g + ih$.
(On pourra supposer l'égalité et trouver les formes de g et h puis vérifier qu'elles conviennent)
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour que f soit normale.

Exercice 4

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est antihermitienne ssi $M^* = -M$.

1. Montrer que : M antihermitienne $\Leftrightarrow iM$ hermitienne.
2. Soient A et B deux matrices hermitiennes.
Montrer que $AB - BA$ est antihermitienne.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(I_n + A)$ soit inversible et $(I_n + A)A^* = 2A$.

1. a. Montrer que $(I_n + A)$ et A commutent.
b. En déduire que $(I_n + A)^{-1}$ et A commutent.
c. En déduire que A^* et A commutent.
2. a. Montrer que A est hermitienne.
b. En déduire que $A^2 = A$.

Exercice 6

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. On dit que $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ est anti-adjoint si et seulement si $u^* = -u$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E), u - u^*$ est anti-adjoint.
2. Montrer que les valeurs propres d'un opérateur anti-adjoint sont imaginaires pures.
3. Montrer que tout opérateur peut s'écrire comme la somme d'un opérateur autoadjoint et d'un opérateur anti-adjoint.

Exercice 7

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ normal.

1. Montrer que les espaces propres de deux valeurs propres différentes sont orthogonaux.
2. Montrer que u est diagonalisable.
(On pourra montrer que E est somme directe des sous espaces propres de u)

Exercice 8

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension $n \geq 1$ et soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$.

1.
 - a. Montrer que : u autoadjoint $\Rightarrow \langle u(t), t \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall t \in E$.
 - b. Que peut-on dire de deux complexes z et z' tels que $z + z' \in \mathbb{R}$ et $iz - iz' \in \mathbb{R}$?
 - c. Montrer que $\langle u(t), t \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall t \in E \Rightarrow \langle y, u(x) \rangle + \langle x, u(y) \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in E$
(On pourra considérer $\langle u(x+y), x+y \rangle$).
 - d. Montrer que $\langle u(t), t \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall t \in E \Rightarrow u$ autoadjoint
(On pourra remarquer que le c) reste vrai si on remplace y par iy)
2. On suppose que u est autoadjoint et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Montrer que $\forall x \in E, \|u(x)\|^4 \leq \langle x, u(x) \rangle \langle u(x), u^2(x) \rangle$.

Exercice 9

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et u^* son opérateur adjoint et soit $v = u^* \circ u$.

1.
 - a. Montrer que $\forall x \in E, \langle v(x), x \rangle \geq 0$.
 - b. En déduire que les valeurs propres de v appartiennent à \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que v est autoadjoint.
3. Montrer que, si u est injective, alors 0 ne peut être une valeur propre de v .

Exercice 10

Soit (e) une base orthonormale d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension n .

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ / u autoadjoint. On pose $\mathcal{M}_e(u) = A = (a_{ij})_{i=1,n}^{j=1,n}$.

1. Montrer que A^2 est hermitienne.
2. Exprimer les valeurs propres de A^2 en fonction de celles de A .
3. Exprimer $\text{tr}(A^2)$ en fonction des $(|a_{ij}|)$ puis en fonction des valeurs propres de A .