



Exercice 1

Déterminer les solutions développables en séries entières de $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Que retrouve-t-on?

Exercice 2

Trouver le développement en série entière de $f(x) = \int_0^x e^{t^2-x^2} dt$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$ pour $n \geq 0$.

On suppose que R le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum u_n x^n$ est non nul. Soit f la somme de cette série.

1. Montrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence, on a $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.
2. En déduire f .
3. Donner un développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$ et en déduire celui de f .
4. Donner une autre formulation des u_n .

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 0$.

1.
 - a. Montrer que la suite u est croissante.
 - b. Montrer que $|u_n| \leq 3^n$ pour $n \geq 0$.
2. On considère la série entière réelle $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$.
 - a. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
 - b. Soit f la somme de cette série. Montrer que f est l'unique solution d'une équation différentielle.
 - c. Déterminer f .
 - d. En déduire une autre formulation des u_n .

Exercice 5

On considère la série trigonométrique $\frac{\pi}{12} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3} - \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\cos 2px}{p^2}$

1. Montrer que cette série converge normalement sur \mathbb{R} et soit S sa somme.
2. Montrer que, dans chacun des intervalles $]-\pi;0[$ et $]0;\pi[$, $S(x)$ est dérivable.

3. Développer en série de Fourier la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; 2π -périodique définie par :
- $$g(x) = 0 \quad \text{si } x \in [-\pi; 0[$$
- $$g(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x \quad \text{si } x \in]0; \pi[$$
- $$g(2k\pi) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6

1. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; 2π -périodique définie par :
 $\forall x \in [0; 2\pi[, f(x) = x^2$.
2. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; 2π -périodique définie par :
 $\forall x \in [-\pi; \pi], f(x) = x^2$.
3. En déduire $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 7

1. Donner le développement en série de Fourier d'une fonction f impaire définie sur \mathbb{R} et périodique de période 2π vérifiant $f(x) = \pi - x$ pour tout réel x de $]0; \pi]$.
2. En déduire $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en utilisant la formule de Parseval.