Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 1 | **1er semestre** | **2003-2004**

Exercice 1

Réunir les tables de vérité des expressions suivantes sur une seule table :
$A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ et $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 2

1. Montrer (en utilisant des tables de vérité) que les expressions suivantes sont des tautologies :
   a. $A \Rightarrow A$
   b. $A \Rightarrow A \vee B$
   c. $(A \wedge B) \Rightarrow \mathrm{A}$
   d. $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$
   e. $\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B})$
   f. $\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$
   g. $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
   h. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$
   i. $[(A \wedge \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}] \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
   j. $[(A \wedge \bar{B}) \Rightarrow F] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ où F est une proposition fausse
2. Donner un exemple d'utilisation "mathématique" des expressions e,f,g et h.

Exercice 3

Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

Exercice 4

La relation $A \Rightarrow B$ signifie-t-elle : (Plusieurs choix possibles)

a. A est une condition suffisante pour avoir B.
b. A est une condition nécessaire pour avoir B.
c. B est une condition suffisante pour avoir A.
d. B est une condition nécessaire pour avoir A.
e. Pour avoir A, il suffit d'avoir B.
f. Pour avoir B, il suffit d'avoir A.

Exercice 5

"Un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire" : La Fontaine.
Les mots "un" ont-ils le même sens dans cette phrase?
Quelle propriété des ensembles finis totalement ordonnés contredit cette affirmation?

Exercice 6

A et B sont des propositions vraies ou fausses.

1. Traduire à l'aide des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ les phrases suivantes :
   a. Il suffit que A soit vraie pour que B le soit.
   b. Il faut que A soit vraie pour que B le soit.
   c. Il faut et il suffit que A soit vraie pour que B le soit.

2. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses?
   a. Pour que $2^n \geq 1000$, il suffit que $n \geq 15$.
   b. Pour que $2^n \geq 1000$, il faut que $n \geq 3$.
   c. $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1000$ équivaut à $n \geq 10$.

Exercice 7

Traduire, à l'aide quantificateurs, les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif ou nul.
2. Tout entier peut s'écrire comme le produit de deux entiers.
3. Il existe un réel dont le produit avec tout réel est nul.
4. Il existe un réel dont le produit avec tout réel est 1.
5. Tout réel non nul est inversible.
6. L'addition est commutative dans l'ensemble des réels.
7. Deux réels égaux ont des carrés égaux

Exercice 8

Traduire en phrases explicites les textes formalisés suivants :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = yx$
2. $\exists y \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in \mathbb{R}\ xy = 0$
3. $\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{Z}\ /\ c = b - a$
4. $\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N}\ /\ a = b\, c$ (Faux)
5. $\forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N}\ /\ a = b\, c$ (Vrai)

Exercice 9

E étant un ensemble, a un réel et f une fonction. Ecrire les négations des énoncés suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, n est premier.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que n soit un multiple de m.
3. $\forall A \subset E,\ \forall B \subset E,\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$.
4. $(\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = 0) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)$.
5. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in \mathbb{R}\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

On pourra aussi étudier la véracité des expressions (et donc de leur négation).

Exercice 10

Quelles sont les négations de :

a. "Tous les jours de la semaine, tous les bureaux sont ouverts."
b. "Tous les jours de la semaine, dans tous les bureaux, il y a au moins un employé absent."

Exercice 11

1. Déterminer $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\left\{\frac{1}{2}\right\}))$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{a\})))$ où a est un objet mathématique quelconque.
2. Soit $A = \{\ \varnothing, \{\varnothing\}, 5, \{5, \varnothing\}, 7\ \}$. A-t-on :
   a. $\varnothing \in A$.
   b. $\{\varnothing\} \in A$.
   c. $\varnothing \subset A$.
   d. $\{\varnothing\} \subset A$.
   e. $\{5\} \in A$.
   f. $\{7, \varnothing\} \subset A$.
   g. $\{\ \varnothing, \{\varnothing\}, \{5, \varnothing\}\} \subset A$.