Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 2 **1er semestre** **2003-2004**

Exercice 1

Soit x un réel. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{x\}))))$?

Exercice 2

Trouver des contre-exemples montrant que l'on a pas $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$.

Exercice 3

1. Soient A, B et C trois expressions. Vérifier que :
   a. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
   b. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
2. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Vérifier que :
   a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 4

Vérifier les lois de De Morgan : $\forall A \in \mathscr{P}(E), \forall B \in \mathscr{P}(E)$: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 5

Simplifier l'expression $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ où A et B sont des parties d'un ensemble E.

Exercice 6

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer les relations suivantes :
1. $A \setminus B = C_A(A \cap B) = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Exercice 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, non vide. Montrer que $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

Exercice 8

Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un même ensemble E.

Démontrer que $(A \cup B) \cap C_E B = A \iff A \cap B = \emptyset$.

Exercice 9

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. Montrer que $A = B \iff (A \cap B = A \cup B)$.

Exercice 10

A, B et C sont trois parties d'un ensemble E.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors on a $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$.
2. Montrer que la réciproque de l'implication précédente est vraie.
3. En déduire que $A = B \iff (A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C)$.

Exercice 11

A et B étant deux parties d'un ensemble E, on rappelle que $A \setminus B = A \cap C_E B = A \cap \overline{B}$.

1. $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 10\}$, $A = \{n \in E \ / \ n < 5\}$ et $B = \{n \in E \ / \ n \text{ pair}\}$.
   Déterminer $A \setminus B$ et $B \setminus A$.
2. On rappelle que $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (différence symétrique).
   a. Déterminer $A \,\Delta\, B$ avec l'exemple ci-dessus.
   b. Déterminer, dans le cas général, $A \,\Delta\, A$ et $A \,\Delta\, \emptyset$.

Exercice 12

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E.

1. Vérifier que : $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
2. Montrer que $(A \,\Delta\, B) \cap A = A \setminus (A \cap B)$.

Exercice 13

1. Dans le plan complexe, considérer l'intérieur d'un rectangle délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 5$, $y = 2$ et $y = 6$ comme un produit cartésien et représenter cet ensemble.
2. Soient les intervalles $E = [1;5]$, $F = [2;6]$, $A = [2;3[\in \mathscr{P}(E)$ et $B = [3;4[\in \mathscr{P}(F)$.
   On considère $E \times F$ et on pose $\overline{A} = C_E A$ et $\overline{B} = C_F B$.
   a. Représenter, sur le graphique précèdent, les ensembles $A \times B$, $\overline{A} \times B$, $A \times \overline{B}$ et $\overline{A} \times \overline{B}$.
   b. Vérifier qu'ils forment une partition de $E \times F$.

Exercice 14

Soient E et F deux ensembles.
Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez.

a. $\forall A,B,C \in \mathscr{P}(E)$, $(A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C) \Rightarrow B = C$.
b. $\Omega \subset E \times F \Rightarrow \exists A \in \mathscr{P}(E)$ et $\exists B \in \mathscr{P}(F) \ / \ \Omega = A \times B$.
c. $\forall A,B \in \mathscr{P}(E)$ et $\forall C,D \in \mathscr{P}(F)$, $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.
d. $\forall A,B \in \mathscr{P}(E)$ et $\forall C,D \in \mathscr{P}(F)$, $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
e. $\mathscr{P}(E \cap F) = \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
f. $\mathscr{P}(E \cup F) = \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$.