Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 3 **1er semestre** **2003-2004**

Exercice 1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduisez, à l'aide des quantificateurs, les propositions suivantes :

a. La fonction f est une application (càd f est partout définie).

b. La fonction est une application constante.

Exercice 2

On sait que si a et b sont des réels alors $a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

A-t-on la même implication si l'on considère non plus des réels mais des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Soient $E = \{a,b,c\}$ et $F = \{\alpha,\beta\}$.

Donner toutes les applications possibles de E vers F.

Exercice 4

Sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, déterminer parmi les relations suivantes celles qui définissent des fonctions :

a. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y>0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$

c. $x^2-y^2=1$ d. $y=4$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n^2 - 4$.

1. Déterminer $f(A)$ où $A = \{n\in\mathbb{Z} \,/\, |n| \le 2\}$.
2. Déterminer $f^{-1}(B)$ où $B = \{n\in\mathbb{Z} \,/\, |n| \le 3\}$.
3. Déterminer $f^{-1}(C)$ où $C = \{n\in\mathbb{Z} \,/\, |n| \le 96\}$.

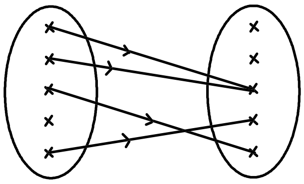
Exercice 6

Soit une application $f : E \to F$, $A\subset E$ et $B\subset F$. Montrer que $f(A\cap f^{-1}(B)) = f(A)\cap B$.

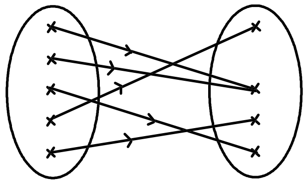
Exercice 7

Parmi les diagrammes suivants, quels sont ceux d'une fonction, d'une application, d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection? Justifier votre réponse.

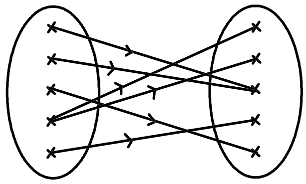
1. a.



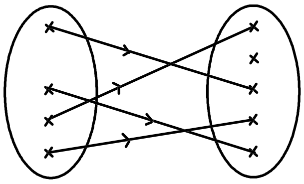
b.



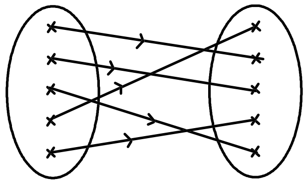
c.



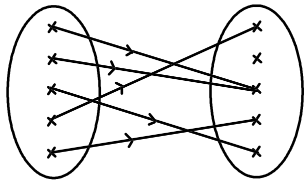
d.



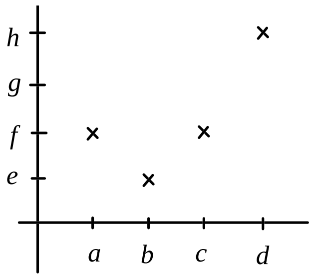
e.



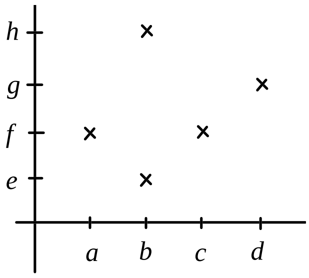
f.



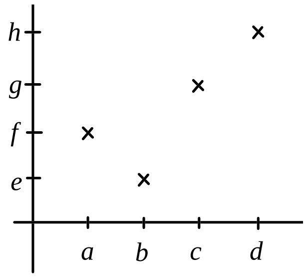
2. a.



b.

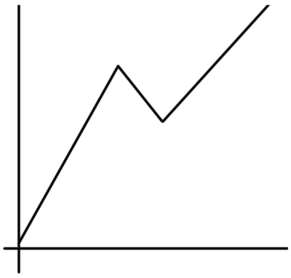


c.

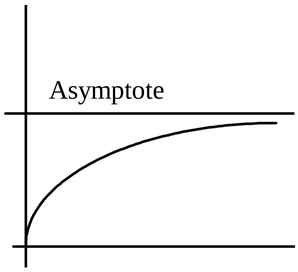


3. On supposera que les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}_+$ et que les propriétés que l'on peut remarquer continuent de se vérifier sur tout $\mathbb{R}_+$.

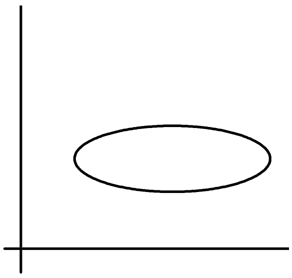
a.



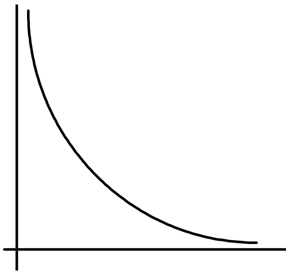
b.



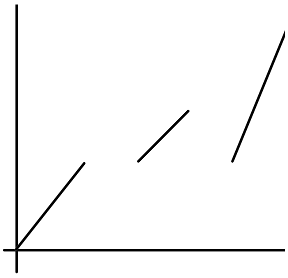
c.



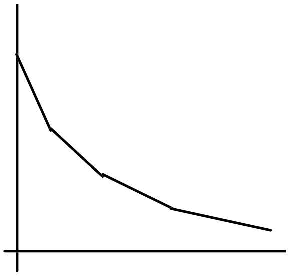
d.



e.



f.



Exercice 8

Soit A une partie de E.
Soit $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.
Soit $\mathscr{P}'$ l'ensemble des parties de E contenant A.
On considère l'application

$$\begin{array}{rl} f : \mathscr{P}(E) & \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}' \\ X & \to (A \cap X ; A \cup X) \end{array}$$

Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque f^{-1}.