Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 4 **1er semestre** **2003-2004**

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 2.$ L'application f est-elle bijective?

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles finis non vides tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$.
Soit f une application de E vers F. Comparer n et p lorsque :
a. f est injective.
b. f est surjective.
c. f est bijective.

Exercice 3

Soit $\mathscr{P}$ le plan Euclidien.
Etudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et déterminer la réciproque si elle existe de chacune des applications suivantes :
1. $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
   $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
2. $p : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ où p est la projection sur une droite D parallèlement à une direction Δ.
3. $s : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ définie par :
si $n \in \left[\frac{1}{2}p(p+1), \frac{1}{2}p(p+3)\right]$ alors $f(n) = \left(n - \frac{1}{2}p(p+1); \frac{1}{2}p(p+3) - n\right)$ où $p \in \mathbb{N}$.
a. Placer les images de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 dans un repère orthonormal.
b. Soit $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $g(i,j) = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1) + i$
   Montrer que f est une bijection et que g est son inverse.

Exercice 5

Donner un exemple d'applications non bijectives f et g telles que $f \circ g$ soit une application bijective.

Exercice 6

1. Montrer que $]0;1[$ est équipotent à $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. (On pourra utiliser une fonction affine)
2. En déduire, grace à la fonction tangente, que $]0;1[$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Francis Wlazinski

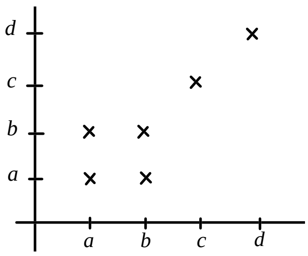
Exercice 7

Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre un ensemble E et l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(E)$ c'est-à-dire que ces deux ensembles ne sont pas équipotents (on pourra raisonner par l'absurde).

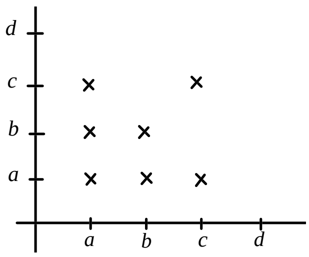
Exercice 8

Soit $E = \{ a,b,c,d \}$. Chaque croix signifie que l'élément en abscisse est en relation avec l'élément en ordonnée. Déterminer, parmi les relations suivantes, celles qui sont réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives.

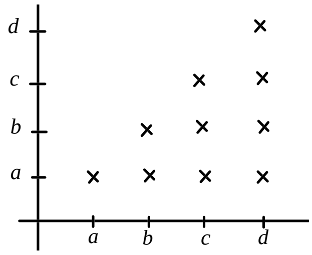
a.



b.



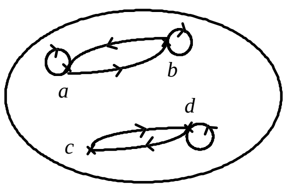
c.



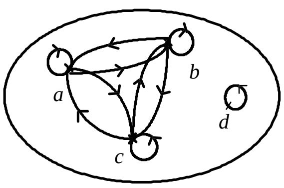
Exercice 9

Soit $E = \{ a,b,c,d \}$. Chaque flèche orientée entre deux éléments signifie que le premier est en relation avec le deuxième. Déterminer, parmi les relations suivantes, celles qui sont réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives.

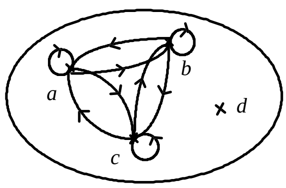
a.



b.



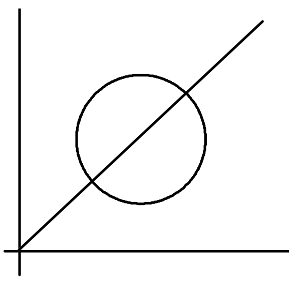
c.



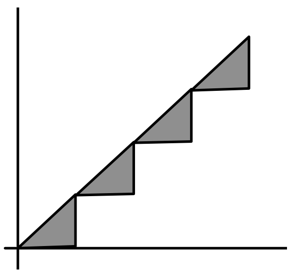
Exercice 10

On supposera que l'ensemble E est $\mathbb{R}_+$ et que les propriétés que l'on peut remarquer sur le graphe de la relation continuent de se vérifier sur tout $\mathbb{R}_+$.
Déterminer, parmi les relations suivantes, celles qui sont réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives.

a.



b.



c.