

#### Exercice 1

1. Quelles sont les relations qui sont à la fois symétriques et antisymétriques sur un ensemble  $E$ ?  
Lesquelles sont réflexives? Transitives?  
En déduire les relations qui sont à la fois d'ordre et d'équivalence.
2. Que pensez-vous de l'affirmation : "une relation qui est à la fois symétrique et transitive est forcément réflexive"?

#### Exercice 2

On considère l'ensemble  $E = \{a, b\}$ .

1. Combien de relations binaires peut-on définir sur  $E$ ?
2. Parmi celles-ci, expliciter les relations qui sont :
  - a. Réflexives.
  - b. Symétriques.
  - c. Non antisymétriques.
  - d. Non transitives.
  - e. Des relations d'équivalence.
  - f. Des relations d'ordre.
  - g. Des relations d'ordre total.

#### Exercice 3

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments. Combien de relations binaires peut-on définir sur  $E$ ?

#### Exercice 4

On considère la relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{Z}$  définie par  $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = kx$ .

Etudier la réflexivité, la symétrie et la transitivité de cette relation.

#### Exercice 5

On désigne par  $E(x)$  la partie entière du réel  $x$ .

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points du plan muni d'un repère orthonormal.

Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie sur  $\mathcal{P}$  par  $M(x, y) \mathcal{R} M'(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} E(x) = E(x') \\ E(y) = E(y') \end{cases}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Représenter les classes d'équivalence des points  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$  et  $C(5/2; 1/2)$ .

## Exercice 6

Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points du plan muni d'un repère orthonormal.

Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie sur  $\mathcal{P}$  par  $M(x,y) \mathcal{R} M'(x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalence de  $(1,1)$ ,  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(1,a)$ , où  $a$  est un réel non nul.
3. Soit  $\mathcal{S}$  la relation binaire définie sur  $\mathcal{P}$  par  $M(x,y) \mathcal{S} M'(x',y') \Leftrightarrow xy = x'y'$  et  $xx' \geq 0$ .  
Est-ce encore une relation d'équivalence?

## Exercice 7

On dit qu'une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est circulaire ssi :  $\forall x,y,z \in E, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow z \mathcal{R} x$ .  
Montrer qu'une relation qui est à la fois circulaire et réflexive est une relation d'équivalence.

## Exercice 8

Etudier les propriétés des relations sur  $\mathbb{R}$  suivantes :

- a.  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy > 0$
- b.  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xy \geq 0$

## Exercice 9

Soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Cette relation est-elle une relation d'ordre total?

## Exercice 10

On considère dans  $\mathbb{Z}$  la relation suivante :  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a - b = 2k$ .

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient  $\mathbb{Z} / \mathcal{R}$ .
3. Montrer que si  $a \mathcal{R} b$  et  $c \mathcal{R} d$  alors  $(a \times c) \mathcal{R} (b \times d)$ .  
(On dit que  $\mathcal{R}$  est compatible avec  $\times$ )

## Exercice 11

Soient  $E$  un ensemble non vide et  $A$  une partie de  $E$ .

On définit la relation  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{P}(E)$  par  $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow A \subseteq X \cup \bar{Y}$ .

1. Cette relation est-elle réflexive, transitive?
2. Que peut-on dire de cette relation si  $A = E$ ?

## Exercice 12

Soit  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $\mathbb{N}^2$  par  $(x,y) \mathcal{R} (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$ .

1. Montrer que c'est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total?
2. Soit  $A = \{(2,2);(3,4);(4,3);(4,6);(5,2)\}$ .  
Quels sont les majorants, minorants et, s'il y a lieu, borne supérieure, borne inférieure, plus petit et plus grand élément de  $A$ ?