Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 6 **1er semestre** **2003-2004**

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_+^*$ muni d'une loi interne $\lozenge$ définie par $x \lozenge y = xy$ et d'une loi externe $\bullet$ d'opérateurs réels définie par $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $a \bullet x = x^a$. Montrer que $(E, \lozenge, \bullet)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Déterminer si les ensembles suivants sont des s.e.v de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

a. $F = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y = 0\}$

b. $G = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$

c. $H = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 - y^2 = 0\}$

Exercice 3

Soient a et b deux réels. Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle $/\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que E muni de la somme usuelle des suites et du produit usuelle d'une suite par un scalaire est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 4

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients réels qui sont multiples de X^3.
On a $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, P = X^3 \tilde{P}$ avec $\tilde{P} \in \mathbb{R}[X]\}$
Montrer que, muni des lois usuelles, E est un $\mathbb{R}$-e.v.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et soit H un s.e.v. de E.

1. Montrer que la relation définie par $x \mathscr{R} y \iff x - y \in H$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\mathrm{cl}(0_E)$.

Exercice 6

Soit E_1 et E_2 deux s.e.v. d'un K-e.v. E. A quelles conditions $E_1 \cup E_2$ est-il un s.e.v. de E?

Exercice 7

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Soit $F_n = \{\ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\ P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n-2)}(0) = 0\ \}$ où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k$ième de la fonction polynomiale associée à P.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, F_n, muni des lois usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Francis Wlazinski

Exercice 8

1. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres :
   a. $a_1 = (-2,1,3)$ $a_2 = (5,-4,1)$
   b. $a_1 = (1,3,-2)$ $a_2 = (2,-5,1)$
2. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ sont-elles libres :
   a. $a_1 = (3,1,0,-2)$ $a_2 = (-2,3,1,4)$
   b. $a_1 = (2,3,-1,0)$ $a_2 = (-3,1,0,2)$ $a_3 = (-4,5,-1,4)$
   c. $a_1 = (1,0,2,3)$ $a_2 = (5,2,4,7)$ $a_3 = (7,4,-2,-1)$ $a_4 = (3,2,0,1)$

Exercice 9

1. Montrer que $(1,-2)$ et $(2,4)$ forment un système libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier qu'il est générateur.

Exercice 10

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leq 2\}$. Parmi les systèmes suivants de E lesquels sont libres? Générateurs de E?

a. $A = 1$ $B = X$ $C = X^2$

b. $A = X^2 - 1$ $B = X^2 + 1$

c. $A = X^2 + X + 1$ $B = -X^2 + X + 1$ $C = X^2 + X - 1$

d. $A = 1$ $B = 3X + 1$ $C = X^2$ $D = X^2 - 6X$

Exercice 11

Soit $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un e.v. $(E,+,.)$ sur $\mathbb{R}$.
Soient $b_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_2 = e_2 + e_3$ et $b_3 = e_3$.

1. Donner les coordonnées de b_1, b_2 et b_3 dans la base (e).
2. Montrer que $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ une base de E.
3. Soit u de coordonnées $(1,-1,2)$ dans la base (b), trouver ses coordonnées dans la base (e).
4. Soit v de coordonnées $(2,1,-3)$ dans la base (e), trouver ses coordonnées dans la base (b).

Exercice 12

Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y - z = 0\}$.

1. Montrer que D est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et prouver que $(1;0;1)$ et $(0;1;2)$ forment une base de D. En déduire $\dim D$.
2. Trouver une autre base de D.

Exercice 13

Soient F et G deux s.e.v d'un même K-e.v. E.
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) $F \cap G = \{0_E\}$

ii) Si $x + y = 0_E$ avec $x \in F$ et $y \in G$ alors $x = y = 0_E$.

Exercice 14

Soient F, G et H trois s.e.v. d'un K-e.v. E.

1. Montrer que $H \cap (F + G) \supset H \cap F + H \cap G$.
2. Donner un C.E. montrant que l'on a pas l'égalité.