

#### Exercice 1

Soit  $F$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ae^{-x} + be^x + ce^{-2x}$  où  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Déterminer une base de  $F$ .

#### Exercice 2

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  càd  $E = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / D_f = \mathbb{R}\}$

On admettra que  $E$  muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication usuelle par un scalaire est un espace vectoriel réel.

1.
  - a. Montrer que  $P = \{f \in E / f \text{ paire}\}$  est un s.e.v de  $E$ .
  - b. Montrer que  $I = \{f \in E / f \text{ impaire}\}$  est un s.e.v de  $E$ .
2. Montrer que  $E = P \oplus I$ .

#### Exercice 3

Soit  $E$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $E = \{(x+y, x-2y, 3x+y) \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\}$ .

Soit  $F$  le s.e.v. de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $u = (1, -1, 1)$ .

1. Montrer que  $E$  est un s.e.v. de  $\mathbb{R}^3$  et donner une base de  $E$ .
2. Montrer que  $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ .

#### Exercice 4

Déterminer le rang des familles suivantes de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{R}^4$ .

1.  $v_1 = (1, 0, -1)$   $v_2 = (2, 1, 0)$   $v_3 = (1, 1, 1)$ .
2.  $v_1 = (1, 0, -1)$   $v_2 = (2, 1, 0)$   $v_3 = (1, 0, 1)$ .
3.  $v_1 = (1, 1, -1, 2)$   $v_2 = (1, 2, 1, 1)$   $v_3 = (0, 1, 2, -1)$
4.  $v_1 = (1, 0, -1, 0)$   $v_2 = (2, 1, 0, 1)$   $v_3 = (1, 0, 1, 2)$   $v_4 = (-1, -1, 1, 1)$ .
5.  $v_1 = (1, 1, -1, 0)$   $v_2 = (1, 0, 0, 1)$   $v_3 = (1, 0, 1, 2)$   $v_4 = (-1, 0, 1, 1)$   $v_5 = (1, 1, 1, 1)$ .
6.  $v_1 = (1, 0, -1, 0)$   $v_2 = (2, 1, 0, 1)$   $v_3 = (0, 1, 2, 1)$   $v_4 = (-1, -1, -1, -1)$ .

#### Exercice 5

On considère sur  $\mathbb{R}^3$  les vecteurs :  $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $u_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Soient  $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  et  $G = \langle u_4, u_5 \rangle$ .

1. Déterminer  $\dim F$ ,  $\dim G$ .
2. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F + G$ .

### Exercice 6

Quelles sont les applications linéaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ?

### Exercice 7

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels non nuls.

On considère l'application  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \rightarrow (x',y') \text{ où } \begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

1. Calculer les images de  $e_1 = (1,0)$  et  $e_2 = (0,1)$ .
2. Vérifier que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .
3. A quelle condition nécessaire et suffisante sur  $a, b, c$  et  $d$ , a-t-on  $\varphi$  surjective?

### Exercice 8

Expliciter la linéarité de l'opérateur dérivée sur tout espace vectoriel de fonctions muni de l'addition usuelle et de la multiplication par un scalaire usuelle.

### Exercice 9

Soient  $F$  et  $G$  les applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définies par :

$$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u) = (3x - 2y, x + 5y)$$

$$G(u) = (x - y, 3x + y)$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des applications linéaires.
2. Ces applications sont-elles bijectives?
3. Déterminer  $F \circ G$ . Est-ce une application linéaire?

### Exercice 10

Soit  $\varphi : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$

$$P \rightarrow (X + 1)P'$$

1. Montrer que  $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4[X])$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}\varphi$ ,  $\text{rg}\varphi$  et  $\text{Im}\varphi$ .