Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : Unité fondamentale

Td 8 **1er semestre** **2003-2004**

Exercice 1

Déterminer le rang de la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Determiner $2A - 3B$.
2. Calculer de deux manières différentes $A \times (B + C)$.

Exercice 3

Déterminer, si cela est possible, MP et PM dans les cas suivants :

a. $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $M = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et soient $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Calculer $A \times I_2$, $I_2 \times A$, $B \times I_3$ et $I_3 \times B$.

Exercice 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.
2. En déduire la propriété que ne possède pas l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.

Exercice 6

Soient $A = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Francis Wlazinski

1. Calculer $A\times B$.
2. En déduire la propriété que ne possède pas l'anneau $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$.
3. $(\mathscr{M}_2(K),+,\times)$ est-il un corps?
4. Calculer $\det A$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que l'on a la relation : $A^2 - 3A + 2I = 0$
2. A l'aide de la relation précédente, déterminer A^{-1}.

Exercice 8

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to (2x - y, x + 3y)$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.
2. Calculer $\varphi(1,0)$, $\varphi(0,1)$, $\varphi(2,-2)$ et $\varphi(-4,-1)$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   Déterminer tous les $A\times X_i$.

Exercice 9

Déterminer, si elle existe, l'inverse A^{-1} de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 & 1/3 \\ -5/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$. Calculer $A'.A$.
2. a. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Expliciter l'équation $AX = B$.

   b. En déduire la résolution du système : $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 4y + 8z = 4 \\ 3x + 9y + 27z = 6 \end{cases}$

Exercice 11

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. M est-elle inversible? Si oui, déterminer M^{-1}.
2. Résoudre le système : $\begin{cases} 2x & & + 5z = 3 \\ -x & + 2y & + z = 5 \\ x & & + 3z = 2 \end{cases}$.