

Exercice 1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} de bases respectives $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ et $(e') = (e'_1, e'_2)$.

1. Soit f l'application linéaire telle que $f(e_1) = e'_1 + e'_2$, $f(e_2) = 3e'_1 - 2e'_2$ et $f(e_3) = 5e'_1 + e'_2$.
 - a. Quelle est la matrice A associée à f dans les bases (e) et (e') .
 - b. Soit u de coordonnées (x, y, z) dans (e) déterminer les coordonnées (x', y') de $f(u)$ dans (e') .
2. Soit g l'endomorphisme de F qui à v de coordonnées (x, y) dans la base (e') associe v' de coordonnées (x', y') dans (e') tel que

$$\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$
 - a. Quelle est la matrice B associée à g dans la base (e') .
 - b. Soit $\varphi = g \circ f$, donner les coordonnées (x'', y'') de $\varphi(u)$ dans (e') en fonction de celles de u .
 - c. Calculer BA et vérifier le résultat du b).

Exercice 2

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 2\} = \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f: E \rightarrow E$

$$P \rightarrow P + (X-1)P' - X^2P'' \quad \text{où } P' \text{ désigne la dérivée première et } P'' \text{ la dérivée seconde de } P.$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\text{Ker } f$.
3. Donner la matrice A associée à f par rapport à la base $(e) = (1, X, X^2)$.
4. A est-elle inversible? Si oui, déterminer A^{-1} .
5. Soit $P = aX^2 + bX + c$ où a, b et c sont des réels.
 - a. En utilisant le 4°, expliciter $f^{-1}(P)$ en fonction de a, b et c .
 - b. En déduire f^{-1} en fonction de P, P' et P'' .

Exercice 3

On considère dans \mathbb{R}^3 la famille $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ où $a_1 = (2, 5, -1)$, $a_2 = (3, 1, -4)$ et $a_3 = (-1, 1, 0)$.

1. Déterminer le rang de la famille (a) .
2. Soit (e) la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - a. Exprimer chacun des a_i comme combinaison linéaire des e_i .
 - b. Exprimer chacun des e_i comme combinaison linéaire des a_i .
3. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 vérifiant :

$$f(a_1) = (3, 2, -7) \quad f(a_2) = (2, -6, 5) \quad f(a_3) = (-2, 2, -3)$$
 Déterminer les images des vecteurs de la base (e) et en déduire la matrice associée à f dans (e) .

Exercice 4

Déterminer le noyau de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $\mathcal{M}_{ee'}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ où (e) et (e') sont les bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^4 . En déduire $\text{rg}(A)$.

Exercice 5

Soit $(e) = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et soient $a_1 = (1, -1)$ et $a_2 = (-3, 5) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(a) = (a_1, a_2)$.

- Déterminer le rang de (a) .
 - En déduire que (a) est une base de \mathbb{R}^2 .
- Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(a_1) = (-1, 3)$ et $f(a_2) = (-2, 0)$.
 - Déterminer $\mathcal{M}_{ae}(f)$, $\mathcal{M}_a(f)$, $\mathcal{M}_e(f)$, et $\mathcal{M}_{ea}(f)$ (de préférence dans cet ordre).
 - Soient $u = (x, y)$ et $u' = (x', y') = f(u)$.
Déterminer x' et y' en fonction de x et y .

Exercice 6

Soit \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $(e) = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice associée dans la base (e) est :

$$\mathcal{M}_e(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer $\text{rg}(A)$ et donner une base de $\text{Im } f$.
- Déterminer $\text{Ker } f$.
- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble E des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

Exercice 8

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Résoudre $AX = B$.

Exercice 9

Calculer les déterminants suivants :

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b. } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 136 & 419 & 258 & 327 \\ 6 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 10

Soient a, b et c des réels. Simplifier le déterminant $D = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.