Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 1 | **1er Semestre** | **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel.

Correction 1

Soient x et y deux rationnels.
$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\,(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / x = \dfrac{p}{q}$.
$y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\,(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / y = \dfrac{p'}{q'}$.
$x \times y = \dfrac{p}{q} \times \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pp'}{qq'}$.
On a $pp' \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}$ donc on a bien $x \times y \in \mathbb{Q}$.
Remarque : FAUX avec irrationnels. En effet, $\dfrac{\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2

Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel.

Correction 2

Soient x et y deux rationnels.
$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\,(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / x = \dfrac{p}{q}$.
$y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists\,(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / y = \dfrac{p'}{q'}$.
$x + y = \dfrac{p}{q} + \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pq' + qp'}{qq'}$.
On a $pq' + qp' \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}$ donc on a bien $x + y \in \mathbb{Q}$.

Exercice 3

Soient x, y, z, a des réels.
Completer les expressions suivantes. En utilisant à chaque étape au plus une formule initiale du cours ou une précedemment prouvée, démontrer chacun de ces résultats.

1. $(x + y) \times z = \ldots + \ldots.$
2. $(x + y) \times (z + t) = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots.$

3. $-(-x) = ...$

4. $x + a = y + a \Leftrightarrow ... = ...$

5. $x + y = 0 \Rightarrow y = ...$

6. $... \times x = x \times ... = 0$

7. $(-x) \times y = x \times (...) = ...(x \times y)$.

8. $(-1) \times x = ...x$

9. $(-x) \times (-y) = ... \times ...$

10. Si $a \neq 0$, $x \times a = y \times a \Leftrightarrow ... = ...$

11. Si $x \times y = 0$ alors ...

Correction 3

1. $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$.

   $(x + y) \times z = z \times (x + y) = z \times x + z \times y = x \times z + y \times z$.

2. $(x + y) \times (z + t) = x \times z + y \times z + x \times t + y \times t$.
   Si on pose $X = (x + y)$, on obtient : $(x + y) \times (z + t) = X \times (z + t) = X \times z + X \times t = (x + y) \times z + (x + y) \times t = x \times z + y \times z + x \times t + y \times t$.

3. $-(-x) = x$

   $-(-x)$ est l'élément unique tel que $-x + (-(-x)) = (-(-x)) + (-x) = 0$. On vérifie que x convient et de par l'unicité $x = -(-x)$

4. $x + a = y + a \Leftrightarrow x = y$

   $(\Leftarrow)$ Axiome?

   $(\Rightarrow)$ En effet, $-a \, \exists$ et $-a = -a$.

   On a $x + a = y + a$ et $-a = -a$ d'où $x + a + (-a) = y + a + (-a)$.

   Donc $x + 0 = y + 0$ et enfin $x = y$.

5. $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

   En effet, $-x \, \exists$ et $-x = -x$.

   On a $x + y = 0$ et $-x = -x$ d'où $-x + x + y = -x + 0$.

   Donc $0 + y = -x$ et enfin $y = -x$.

6. $0 \times x = x \times 0 = 0$

   $0 \times x = (0 + 0) \times x = 0 \times x + 0 \times x$
   Si on pose $X = 0 \times x$, on a l'équation $X = X + X$. D'où $X + (-X) = X + X + (-X)$ càd $0 = X + 0$ et donc $X = 0 = 0 \times x$.

7. $(-x) \times y = x \times (-y) = -(x \times y)$.

   $-(x \times y)$ est l'unique réel tel que $(x \times y) + (-(x \times y)) = (-(x \times y)) + (x \times y) = 0$.
   Il suffit donc de vérifier que $(-x) \times y$ et $x \times (-y)$ vérifie bien ces équations.
   $(x \times y) + (-x) \times y = (x + (-x)) \times y = 0 \times y = 0$ idem par commutativité.
   $(x \times y) + x \times (-y) = x \times (y + (-y)) = x \times 0 = 0$ idem par commutativité.

8. $(-1) \times x = -(1 \times x) = -x$

9. $(-x) \times (-y) = x \times y$

   $(-x) \times (-y) = -(x \times (-y)) = -(-(x \times y)) = x \times y$

10. Si $a \neq 0$, $x \times a = y \times a \Leftrightarrow x = y$

    $(\Leftarrow)$ Trivial.

    $(\Rightarrow)$

    $x \times a = y \times a \Leftrightarrow x \times a + (-y \times a) = 0$
    $\Rightarrow x \times a + (-y) \times a = 0$
    $\Rightarrow (x + (-y)) \times a = 0$
    Or a^{-1} existe car $a \neq 0$
    $\Rightarrow (x + (-y)) \times a \times a^{-1} = 0 \times a^{-1}$
    $\Rightarrow x + (-y) = 0$
    $\Rightarrow x = y$.

11. Si $x \times y = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.

    Si $y = 0$, l'application est vraie.

    Si $y \neq 0$, $y^{-1} \exists$ et donc $x \times y = 0 \Rightarrow (x \times y) \times y^{-1} = 0 \times y^{-1}$
    $\Rightarrow x \times (y \times y^{-1}) = 0 \Rightarrow x \times 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

Exercice 4

1. Montrer qu'un réel x est positif si et seulement si $-x$ est négatif.

2. Montrer que le produit d'un positif avec un négatif est négatif.

3. Montrer que le produit de deux négatifs est positif.

4. En déduire la règle : le carré d'un réel est ....

Correction 4

1. $-x \exists$ donc $x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x + (-x) \geq 0 + (-x)$.

2. $y \leq 0$ donc $-y \geq 0$ or $x \geq 0$ d'où $x \times (-y) \geq 0$.
   On obtient $-(x \times y) \geq 0$ et enfin $x \times y \leq 0$.

3. $x \leq 0$ et $y \leq 0$ donc $-x \geq 0$ et $-y \geq 0$. D'où $(-x) \times (-y) \geq 0$ et enfin $x \times y \geq 0$.

4. Le carré d'un réel est toujours positif.
   Si x est positif : règle du cours. Sinon, question précedente.

Exercice 5

1. Montrer que si $x \leq y$ et $0 \leq a$ alors $ax \leq ay$.
2. Montrer que si $x \leq y$ et $a \leq 0$ alors $ay \leq ax$.
3. En déduire que $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$.

Correction 5

1. $x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x$ or $0 \leq a$ donc $0 \leq a(y-x)$ et $a(y-x) \geq 0$.
   Càd $ay - ax \geq 0$ et enfin $ay \geq ax$.
2. On a $-a \geq 0$ donc $-ax \leq -ay$ et $-ax + ax + ay \leq -ay + ax + ay$. C'est-à-dire $ay \leq ax$.
3. On a $-1 \leq 0$ d'où $a \leq b \Leftrightarrow (-1) \times b \leq (-1) \times a$.

Exercice 6

Completer et justifier : si $0 < a \leq b$ et $0 \leq x \leq y$ alors $0 \leq \dfrac{x}{\ldots} \leq \dfrac{y}{\ldots}$.

Correction 6

Si $0 < a \leq b$ et $0 \leq x \leq y$ alors $0 \leq \dfrac{x}{b} \leq \dfrac{y}{a}$.
En effet, $0 < a \leq b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.
Avec $0 \leq x \leq y$, on obtient le résultat par produit.

Exercice 7

Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $xy \notin \mathbb{Q}$.
(Le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est irrationnel)

Correction 7

Par l'absurde, supposons que $xy \in \mathbb{Q}$. Donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ and $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $xy = \dfrac{p}{q}$.
Puisque $x \in \mathbb{Q}^*$, il existe $p' \in \mathbb{Z}^*$ and $q' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \dfrac{p'}{q'}$.
D'où $\dfrac{p'}{q'} \times y = \dfrac{p}{q}$ et donc $y = \dfrac{pq'}{qp'}$: contraire aux hypothèses.
Remarque: $0 \times \sqrt{2} = 0$.

Exercice 8

Pour chacun des réels suivants, déterminer s'il est rationnel ou non. Si oui, trouver son écriture en fraction irréductible.
a) $\sqrt{8}$ *b)* $0,215$ *c)* $6,2450450450...$ (450 se répétant à l'infini)
d) $1,01001000100001....$(un 0 de plus à chaque fois entre les deux 1)
e) $\dfrac{\pi}{3}$ *f)* $\sqrt{1369}$

Correction 8

a) $\sqrt{8} = 2 \times \sqrt{2}$. Le produit d'un rationnel par un irrationnel est irrationnel.
b) $0,215 = \dfrac{215}{1000} = \dfrac{43}{200}$
c) $10x = 62,450450450...$ et $10000x = 62450,450450450....$
D'où $9990x = 62388$ càd $x = \dfrac{62388}{9990} = \dfrac{3466}{555}$.
d) Pas d'écriture décimale périodique.
e) $\dfrac{\pi}{3} = \pi \times \dfrac{1}{3}$. Le produit d'un rationnel par un irrationnel est irrationnel.
f) $\sqrt{1369} = 37$

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{a}$ soit irrationnel.

1. L'implication suivante est-elle vraie? $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y\sqrt{a} = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.
2. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x + y\sqrt{a} = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.
3. Soient p et q deux entiers relatifs, montrer que, si $1 + \sqrt{a}$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, alors $1 - \sqrt{a}$ est solution de la même équation.

Correction 9

1. Non. Par exemple, il suffit de prendre $x = -\sqrt{a}$ et $y = 1$.
2. On a cette fois $x, y \in \mathbb{Q}$.
   Si $y = 0$, on obtient $x = 0$.
   Si $y \neq 0$, on a $x = -y\sqrt{a}$. Or le produit d'un irrationnel par un rationnel non nul est irrationnel. Ce qui signifierait que x est irrationnel : contraire aux hypothèses.
3. $1 + \sqrt{a}$ solution de $x^3 + px + q \Leftrightarrow (1 + \sqrt{a})^3 + p(1 + \sqrt{a}) + q = 0$.
   $\Leftrightarrow 1 + 3\sqrt{a} + 3a + a\sqrt{a} + p + p\sqrt{a} + q = 0$.
   $\Leftrightarrow (3 + a + p)\sqrt{a} + 1 + 3a + p + q = 0$.
   Soit $\alpha = 1 + 3a + p + q$ et $\beta = 3 + a + p$.
   On a $\alpha + \beta\sqrt{a} = 0$ avec α et β rationnels. D'après la question précedente, on a $\alpha = 0 = 1 + 3a + p + q$ et $\beta = 0 = 3 + a + p$.
   Pour vérifier que $1 - \sqrt{a}$ est solution de la même équation, il faut calculer $(1 - \sqrt{a})^3 + p(1 - \sqrt{a}) + q$ et vérifier que c'est nul.
   $(1 - \sqrt{a})^3 + p(1 - \sqrt{a}) + q = 1 - 3\sqrt{a} + 3a - a\sqrt{a} + p - p\sqrt{a} + q = \alpha - \beta\sqrt{a} = 0$.

Exercice 10

Compléter.

1. $-3 \leq x \leq 1 \Rightarrow \cdots \leq x^2 \leq \cdots$.
2. $-2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \cdots \leq x^2 \leq \cdots$.
3. $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow \cdots \leq x \leq \cdots$.
4. $-5 \leq x \leq -2$ et $-1 \leq y \leq 2 \Rightarrow \cdots \leq \dfrac{y^3}{x^2} \leq \cdots$.

Correction 10

1. $-3 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$.
   En effet $-3 \leq x \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 1$. Or $-3 \leq x \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq x^2 \leq 9$ et $0 \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq x^2 \leq 1$.

2. $-2 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 16$.
   En effet, $-2 \leq x \leq 4 \;\Rightarrow\; -4 \leq x \leq 4 \;\Rightarrow\; 0 \leq |x| \leq 4 \;\Rightarrow\; 0 \leq |x|^2 \leq 16$.

3. $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$.

4. $-5 \leq x \leq -2$ et $-1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 25$ et $-1 \leq y^3 \leq 8$.
   $\Rightarrow \dfrac{1}{25} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{4}$ et $(-1 \leq y^3 \leq 0$ ou $0 \leq y^3 \leq 8) \Rightarrow -\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{y^3}{x^2} \leq 2$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{2x+3} = x$
2. $\sqrt{2x+3} < x$
3. $\sqrt{2x+3} > x$

Correction 11

L'équation et les inéquations ci-dessus sont définies pour $2x+3 \geq 0$ càd $x \geq -\dfrac{3}{2}$.

1. Il faut $x \geq 0$ donc l'ensemble de définition de l'équation est $[0; +\infty[$.
   Sur cet ensemble, $\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow 2x+3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$.
   On trouve $\Delta = 16 = 4^2$, $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
   D'où $\mathcal{S} = \{3\}$.

2. $\sqrt{2x+3} < x$
   Si $x < 0$, il n'y a pas de solution. Si $x \geq 0$, $\sqrt{2x+3} < x \Leftrightarrow 2x+3 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$.
   Les racines sont -1 et 3 et le coefficient du terme en x^2 est positif donc $x^2 - 2x - 3$ est strictement positif sur $]-\infty; -1[\cup[3; +\infty[$.
   Donc $\mathcal{S} = [3; +\infty[$.

3. $\sqrt{2x+3} > x$.
   Si $x \leq 0$, l'inéquation est toujours vrai donc $\mathcal{S}_1 = \left[-\dfrac{3}{2}; 0\right]$.
   Si $x > 0$, $\sqrt{2x+3} > x \Leftrightarrow 2x+3 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$.
   Les racines sont -1 et 3 et le coefficient du terme en x^2 est positif donc $x^2 - 2x - 3$ est strictement négatif sur $]-1; 3[$.
   Donc $\mathcal{S}_2 = [0; 3[$.
   D'où $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left[-\dfrac{3}{2}; 3\right[$.