Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 1 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel.

Exercice 2

Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel.

Exercice 3

Soient x, y, z, a des réels.
Compléter les expressions suivantes. En utilisant à chaque étape au plus une formule initiale du cours ou une précedemment prouvée, démontrer chacun de ces résultats.

1. $(x + y) \times z = ... + ...$
2. $(x + y) \times (z + t) = ... + ... + ... + ...$
3. $-(-x) = ...$
4. $x + a = y + a \Leftrightarrow ... = ...$
5. $x + y = 0 \Rightarrow y = ...$
6. $... \times x = x \times ... = 0$
7. $(-x) \times y = x \times (...) = ...(x \times y).$
8. $(-1) \times x = ...x$
9. $(-x) \times (-y) = ... \times ...$
10. Si $a \neq 0$, $x \times a = y \times a \Leftrightarrow ... = ...$
11. Si $x \times y = 0$ alors ...

Exercice 4

1. Montrer qu'un réel x est positif si et seulement si $-x$ est négatif.
2. Montrer que le produit d'un positif avec un négatif est négatif.

3. Montrer que le produit de deux négatifs est positif.

4. En déduire la règle : le carré d'un réel est ....

Exercice 5

1. Montrer que si $x \leq y$ et $0 \leq a$ alors $ax \leq ay$.

2. Montrer que si $x \leq y$ et $a \leq 0$ alors $ay \leq ax$.

3. En déduire que $a \leq b \Leftrightarrow -b \leq -a$.

Exercice 6

Compléter et justifier : si $0 < a \leq b$ et $0 \leq x \leq y$ alors $0 \leq \frac{x}{\ldots} \leq \frac{y}{\ldots}$.

Exercice 7

Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ et si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $xy \notin \mathbb{Q}$.
(Le produit d'un rationnel non nul par un irrationnel est irrationnel)

Exercice 8

Pour chacun des réels suivants, déterminer s'il est rationnel ou non. Si oui, trouver son écriture en fraction irréductible.
a) $\sqrt{8}$ *b)* $0,215$ *c)* $6,2450450450...$ (450 se répétant à l'infini)
d) $1,01001000100001....$(un 0 de plus à chaque fois entre les deux 1)
e) $\frac{\pi}{3}$ *f)* $\sqrt{1369}$

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{a}$ soit irrationnel.

1. L'implication suivante est-elle vraie? $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y\sqrt{a} = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.

2. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{Q}, x + y\sqrt{a} = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.

3. Soient p et q deux entiers relatifs, montrer que, si $1 + \sqrt{a}$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, alors $1 - \sqrt{a}$ est solution de la même équation.

Exercice 10

Compléter.

1. $-3 \leq x \leq 1 \Rightarrow \cdots \leq x^2 \leq \cdots$.

2. $-2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \cdots \leq x^2 \leq \cdots$.

3. $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow \cdots \leq x \leq \cdots$.

4. $-5 \leq x \leq -2$ et $-1 \leq y \leq 2 \Rightarrow \cdots \leq \dfrac{y^3}{x^2} \leq \cdots$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{2x+3} = x$

2. $\sqrt{2x+3} < x$

3. $\sqrt{2x+3} > x$