Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 2 | **1er Semestre** | **2003/2004**

Exercice 1

Représenter la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \mathrm{E}(x)$.

Correction 1

Exercice 2

Soient x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. $\mathrm{E}(x+y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y)$.
2. $\mathrm{E}(x \times y) = \mathrm{E}(x) \times \mathrm{E}(y)$.
3. $\mathrm{E}(nx) = n\mathrm{E}(x)$.
4. $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$.

Correction 2

1. Faux. Si on prend : $x = 1,7$ et $y = 1,8$.
   $\mathrm{E}(x) = 1$, $\mathrm{E}(y) = 1$ et $\mathrm{E}(x+y) = 3$.
2. Faux. Si on prend : $x = 1,5$ et $y = 1,5$.
   $\mathrm{E}(x) = 1$, $\mathrm{E}(y) = 1$ et $\mathrm{E}(x \times y) = 2$.
3. Faux. Si on prend : $x = 1,7$ et $n = 2$.
   $\mathrm{E}(x) = 1$, $\mathrm{E}(nx) = 3$ et $n\mathrm{E}(x) = 2$
4. Vrai. Par définition $\mathrm{E}(a)$ est l'unique entier tel que $\mathrm{E}(a) \leq a < \mathrm{E}(a) + 1$.
   On a $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x) + 1$ et donc $\mathrm{E}(x) + n \leq x + n < \mathrm{E}(x) + n + 1$.
   Mais $\mathrm{E}(x) + n$ et $\mathrm{E}(x) + n + 1$ sont des entiers. De par l'unicité de la partie entière on a bien $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$.

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Encadrer la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x^2+x)}{x^2}$ par deux expressions ne dépendant que de x.

Correction 3

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a - 1 < \mathrm{E}(a) \leq a$.
Donc $x^2 + x - 1 < \mathrm{E}(x^2 + x) \leq x^2 + x$. On a $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2} < \dfrac{\mathrm{E}(x^2 + x)}{x^2} \leq \dfrac{x^2 + x}{x^2}$.

Exercice 4

Soient a et b deux réels, on note $\sup(a, b)$ le plus grand des deux et $\inf(a, b)$ le plus petit.

1. Montrer que $\sup(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.
2. Trouver une formule analogue pour $\inf(a, b)$.

Correction 4

1. Si $a \geq b$, $\sup(a, b) = a$.
   On a $a - b \geq 0$ d'òu $|a - b| = a - b$ et $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + a - b}{2} = \dfrac{2a}{2}$.
   Si $a < b$, $\sup(a, b) = b$.
   On a $a - b < 0$ d'òu $|a - b| = b - a$ et $\dfrac{a + b + |a - b|}{2} = \dfrac{a + b + b - a}{2} = \dfrac{2b}{2}$.
2. $\inf(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.
   On a $\inf(a, b) = \sup(a, b) - |a - b|$.

Exercice 5

Démontrer l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Correction 5

$$\begin{aligned}
|x + y| \leq |x| + |y| &\Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \text{ car } |x + y| \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x + y)^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\
&\Leftrightarrow 2xy \leq 2|x||y| \\
&\Leftrightarrow xy \leq |xy| \quad \text{toujours vrai.}
\end{aligned}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|4x - 1| = 3$.
2. $|8x - 1| = -x^2 + 4x - 5$.
3. $|2x - 5| = |x - 1|$

4. $|2x-1| > \frac{1}{4}$.

5. $|x+2| \leq |1-2x|$.

6. $|x+y-3| + |x-y+1| = 0$.

Correction 6

1. $|4x-1| = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-1=3$ ou $4x-1=-3 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$.
   $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; 1\}$.

2. $|8x-1| = -x^2+4x-5$.
   $\Delta = 16 - 4 \times (-1) \times (-5) < 0$: donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. $|2x-5| = |x-1| \quad \Leftrightarrow \quad 2x-5 = x-1$ ou $2x-5 = -x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x=4$ ou $x=2$.
   $\mathcal{S} = \{2; 4\}$.

4. $|2x-1| > \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 < -\frac{1}{4}$ ou $2x-1 > \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{3}{8}$ ou $x > \frac{5}{8}$.
   $\mathcal{S} =]-\infty; \frac{3}{8}[\cup]\frac{5}{8}; +\infty[$.

5. $|x+2| \leq |1-2x| \quad \Leftrightarrow \quad |x+2|^2 \leq |1-2x|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 \leq (1-2x)^2$
   $\Leftrightarrow \quad (1-2x)^2 - (x+2)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-x)(-1-3x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(3x+1) \geq 0$.
   $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [3; +\infty[$.

6. $|x+y-3| + |x-y+1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x+y-3| = 0$ et $|x-y+1| = 0$
   $\Leftrightarrow \quad x+y-3 = 0$ et $x-y+1 = 0$
   $\Leftrightarrow \quad x = 1$ et $y = 2$.
   $\mathcal{S} = \{(1; 2)\}$.

Exercice 7

1. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que : $\quad x \in [a,b] \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$.

2. Traduire en terme de distance l'expression précedente.

3. Sachant que $x \in [1; 5]$, montrer que $|(x-3)^2 + x - 4| \leq 7$.

Correction 7

1. $\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{b-a}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$
   $\Leftrightarrow \quad \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \leq x \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq x \leq b$

2. La distance de x à $\frac{a+b}{2}$ est inférieure ou égale à $\frac{b-a}{2}$ càd à la moitié de la distance de a à b.

3. $(x-3)^2+x-4 = x^2-5x+5 = (x-\frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4}$.
   $1 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x^2 \leq 25$
   et $1 \leq x \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 25 \leq -5x \leq 1$: Pas la bonne méthode.

   $1 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x - \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}$
   $\Rightarrow \quad 0 \leq (x-\frac{5}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$
   $\Rightarrow \quad -\frac{5}{4} \leq (x-\frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4} \leq 5$
   $\Rightarrow \quad |(x-3)^2+x-4| \leq 5 \leq 7$
   Autre méthode : $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2$ et $-3 \leq x-4 \leq 1$.
   Donc $0 \leq (x-3)^2 \leq 4$ et $-3 \leq x-4 \leq 1$.
   D'où $-3 \leq (x-3)^2+x-4 \leq 5$ et $|(x-3)^2+x-4| \leq 5$.
   Remarque : $|x-3| = d(x,3) =$ distance de x au milieu de $[1;5]$.

Exercice 8

1. Démontrer que $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ puis interpréter cette inégalité en termes de valeurs approchées de $\sqrt{3}$.
2. Soit $X = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.
   (a) Encadrer $2+\sqrt{3}$ et $3-\sqrt{3}$ puis en déduire un encadrement de X.
   (b) Simplifier X et trouver un autre encadrement de X.

Correction 8

1. On a $(1,7)^2 = 2,89$ et $(1,8)^2 = 3,24$. Donc $(1,7)^2 < 3 < (1,8)^2$.
   Tous les termes étant positifs, on peut donc passer à la racine càd $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$.
   $1,7$ est une valeurs approchée de $\sqrt{3}$ à $0,1$ près par défaut. $1,8$ est une valeurs approchée de $\sqrt{3}$ à $0,1$ près par excés.
2. $X = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.
   (a) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Leftrightarrow 3,7 < 2+\sqrt{3} < 3,8$.
   $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Leftrightarrow -1,8 < -\sqrt{3} < -1,7 \Leftrightarrow 1,2 < 3-\sqrt{3} < 1,3$.
   D'où $\frac{10}{13} < \frac{1}{3-\sqrt{3}} < \frac{10}{12}$ et $\frac{37}{13} < \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} < \frac{38}{12}$ et
   (b) $X = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{9+5\sqrt{3}}{6}$.
   (c) $1,7 < \sqrt{3} < 1,8 \Leftrightarrow \frac{17}{2} < 5\sqrt{3} < 9 \Leftrightarrow \frac{35}{2} < 9+5\sqrt{3} < 18$.
   D'où $\frac{35}{12} < \frac{9+5\sqrt{3}}{6} < \frac{18}{6}$ càd $\frac{35}{12} < \frac{9+5\sqrt{3}}{6} < 3$.

Exercice 9

On appelle distance entre a et b, le réel positif $d(a,b) = |a-b|$.

1. Vérifier que $x^2 - 2^2 = (x-2)^2 + 4(x-2)$.
2. En déduire que, si la distance entre x et 2 est inférieure à $0,01$, alors la distance entre x^2 et 2^2 est inférieure à $0,05$.
3. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5}; 1\right)$.
   Montrer que, si la distance entre x et 2 est inférieure à η, alors la distance entre x^2 et 2^2 est inférieure à ε.

Correction 9

1. $(x-2)^2 + 4(x-2) = x^2 - 4x + 4 + 4x - 8 = x^2 - 4 = x^2 - 2^2$.
2. $d(x,2) = |x-2|$.
   $|x-2| \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (x-2)^2 \leq 0,0001$.
   $|x-2| \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad -0,01 \leq x-2 \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad -0,04 \leq 4(x-2) \leq 0,04$
   D'où $|x-2| \leq 0,01 \Rightarrow -0,04 \leq (x-2)^2 + 4(x-2) \leq 0,0401$
   $\Rightarrow \; |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leq 0,0401 \leq 0,05$.
   Càd $d(x^2, 2^2) = |x^2 - 2^2| \leq 0,05$.

   Autre methode : On a $|x-2|^2 \leq 0,0001$ et $4|x-2| \leq 0,04$
   $$\begin{aligned} & |x^2-2^2| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq |(x-2)^2| + |4(x-2)| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq |x-2|^2 + 4|x-2| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq 0.0401 < 0,05 \end{aligned}$$

3. $|x-2| \leq \eta \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ et $|x-2| \leq 1$.
   On a $|x-2|^2 \leq \eta^2$ et $4|x-2| \leq 4\eta$
   $$\begin{aligned} & |x^2-2^2| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq |(x-2)^2| + |4(x-2)| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq |x-2|^2 + 4|x-2| \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq \eta^2 + 4\eta \\ \Rightarrow \quad & |x^2-2^2| \leq \eta(\eta+4) \end{aligned}$$
   Or $\eta \leq 1$, donc $\eta + 4 \leq 5$
   $\Rightarrow \quad |x^2-2^2| \leq 5\eta \leq 5 \times \frac{\varepsilon}{5} \leq \varepsilon$.

Exercice 10

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.

Correction 10

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2 \leq (|x|+|y|)^2 \leq 2(x^2+y^2) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2) \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \leq 2|x||y| \leq x^2+y^2 \end{aligned}$$

La première inégalité est toujours vraie, il faut donc montrer la deuxième.
$x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$.