Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 2 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Représenter la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \mathrm{E}(x)$.

Exercice 2

Soient x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

1. $\mathrm{E}(x+y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y)$.
2. $\mathrm{E}(x \times y) = \mathrm{E}(x) \times \mathrm{E}(y)$.
3. $\mathrm{E}(nx) = n\mathrm{E}(x)$.
4. $\mathrm{E}(x+n) = \mathrm{E}(x) + n$.

Exercice 3

Encadrer la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{E}(x^2+x)}{x^2}$ par deux expressions ne dépendant que de x.

Exercice 4

Soient a et b deux réels, on note $\sup(a,b)$ le plus grand des deux et $\inf(a,b)$ le plus petit.

1. Montrer que $\sup(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.
2. Trouver une formule analogue pour $\inf(a,b)$.

Exercice 5

Démontrer l'inégalité triangulaire : $\quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|4x-1| = 3$.
2. $|8x-1| = -x^2 + 4x - 5$.

3. $|2x-5| = |x-1|$
4. $|2x-1| > \frac{1}{4}$.
5. $|x+2| \leq |1-2x|$.
6. $|x+y-3| + |x-y+1| = 0$.

Exercice 7

1. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que : $x \in [a,b] \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$.
2. Traduire en terme de distance l'expression précedente.
3. Sachant que $x \in [1;5]$, montrer que $|(x-3)^2 + x - 4| \leq 7$.

Exercice 8

1. Démontrer que $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ puis interpréter cette inégalité en termes de valeurs approchées de $\sqrt{3}$.
2. Soit $X = \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.
   (a) Encadrer $2+\sqrt{3}$ et $3-\sqrt{3}$ puis en déduire un encadrement de X.
   (b) Simplifier X et trouver un autre encadrement de X.

Exercice 9

On appelle distance entre a et b, le réel positif $d(a,b) = |a-b|$.

1. Vérifier que $x^2 - 2^2 = (x-2)^2 + 4(x-2)$.
2. En déduire que, si la distance entre x et 2 est inférieure à $0,01$, alors la distance entre x^2 et 2^2 est inférieure à $0,05$.
3. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \inf\left(\frac{\varepsilon}{5}; 1\right)$.
   Montrer que, si la distance entre x et 2 est inférieure à η, alors la distance entre x^2 et 2^2 est inférieure à ε.

Exercice 10

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$.