Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 3 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique et exponentielle les deux complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -5i$.

Correction 1

- $|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2.$

$z_1 = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$

- $|z_2| = |-5i| = 5$

$z_2 = 5(0 - i) = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}} = 5e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Exercice 2

Déterminer $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$.

Correction 2

On a $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 2^{10} \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 1024\, e^{i\frac{10\pi}{3}} = 1024\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1024\, e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 1024\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1024\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 512(-1 - \sqrt{3}i)$

Exercice 3

Donner les conjugués des complexes suivants : $z_1 = 2i - 1$, $z_2 = 3 - \sqrt{2}$ et $z_3 = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction 3

- $\overline{z_1} = -2i - 1.$
- $\overline{z_2} = 3 - \sqrt{2}.$
- $\overline{z_3} = 1 + \overline{e^{i\theta}} = 1 + e^{-i\theta}.$

Exercice 4

Déterminer les formes algébrique et trigonométrique du complexe $z = \dfrac{(1-i)^{2000}}{\left(\sqrt{3} - i\right)^{999}}$.

Correction 4

$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Donc $z=\dfrac{\sqrt{2}^{2000}\times e^{-i\frac{2000\pi}{4}}}{2^{999}\times e^{-i\frac{999\pi}{6}}}=\dfrac{2^{1000}\times e^{-i500\pi}}{2^{999}e^{-i\frac{333\pi}{2}}}=2\times\dfrac{1}{e^{-i\frac{\pi}{2}-166\pi}}=2\times e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$.

Exercice 5

1. Déterminer la forme trigonométrique de $1-e^{i\theta}$ où $\theta\in]0;2\pi[$ (mettre $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur).

2. Même question avec $\theta\in]2\pi;4\pi[$.

3. Pour $\theta\not\equiv\pi[2\pi]$, simplifier $z=\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

Correction 5

1. $1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

   Donc $\left|1-e^{i\theta}\right|=\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right|\times\left|-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=2\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$.

   Or, si $\theta\in]0;2\pi[$, $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$, donc $\left|1-e^{i\theta}\right|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

   D'où $1-e^{i\theta}=2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(-ie^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}\right)$.

2. Si $\theta\in]2\pi;4\pi[$, $\sin\dfrac{\theta}{2}<0$ et $\left|1-e^{i\theta}\right|=-2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

   Donc $1-e^{i\theta}=-2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(ie^{i\frac{\theta}{2}}\right)=-2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=-2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}\right)$.

3. $z=\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)}=-i\tan\dfrac{\theta}{2}$

Exercice 6

Trouver les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$ en utilisant les formes algébriques dans un premier temps, puis en utilisant les formes trigonométriques.

Correction 6

• On cherche $z=a+ib$ tel que $z^2=1+i\sqrt{3}$.
On a $z^2=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$ et $|z|^2=a^2+b^2$.
Donc $a^2-b^2=1$, $a^2+b^2=2$ et $2ab=\sqrt{3}$
D'où $(a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ ou $(a=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$
• $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$
On cherche $z=re^{i\theta}$ tel que $z^2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
On a $z^2=r^2e^{2i\theta}$.
Donc $r=\sqrt{2}$ et $2\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ càd $r=\sqrt{2}$ et $\theta\equiv\frac{\pi}{6}[\pi]$.
Càd $\mathcal{S}=\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}};\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}\}$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

2. Donner une interprétation géométrique de ces solutions.

3. Etudier le cas particulier $n = 3$.

4. Etudier le cas particulier $n = 4$.

5. Que peut-on dire des autres racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non nul Z si l'on en connaît une?

6. Montrer que la somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité vaut 0.

Correction 7

1. On s'intéresse à la résolution d'équations de type $z^n = 1$ où $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions sont appelées racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
   On a $|z^n| = |z|^n$ d'après les propriétés du module et on a aussi $|z|^n = |1| = 1$ càd $|z| = 1$.
   On a $Arg(z^n) \equiv n.Arg(z)[2\pi]$. Comme 1 est un nombre réel, son argument est $0 + 2k\pi$.
   D'où $Arg(z) \equiv 0[\frac{2\pi}{n}]$.
   En conclusion l'équation $z^n = 1$ admet n racines distinctes :
   $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ avec $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.
   Ou encore $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

2. Sur le cercle trigonométrique, ce sont les sommets de polygônes réguliers.

3. Cas particulier où $n = 3$.
   Trois solutions $z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   z_1 est tellement courant qu'on lui a attribué un symbole : j.
   On a $z_2 = \overline{j} = j^2$.
   Dans le plan complexe, les solutions sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 1.

4. Cas particulier où $n = 4$.
   On a $1^4 = 1$, $(-1)^4 = 1$, $i^4 = 1$ et $(-i)^4 = 1$. Puisqu'il n'y a que 4 racines $4^{\text{ième}}$ de l'unité, ce sont obligatoirement 1, -1, i,et $-i$ qui forment un carré.

5. On a $(z_1)^n = Z$. Soit z_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
   $(z_0 \times z_1)^n = (z_0)^n \times (z_1)^n = 1 \times Z = Z$.
   Inversement. Soit z_2 une autre racines $n^{\text{ième}}$ du complexe Z.
   On a $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n = \dfrac{{z_2}^n}{{z_1}^n} = \dfrac{Z}{Z} = 1$.
   Donc $\dfrac{z_2}{z_1}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

6. On cherche à déterminer :
   $1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + ... + e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$.
   Si on pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on obtient :
   $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \dfrac{1 - z^n}{1 - z} = 0$.

Exercice 8

Résoudre $z^5 = 4(1+i)$ et représenter les solutions dans le plan.

Correction 8

$4(1+i) = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 32^{\frac{1}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{5}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Si $z = r\, e^{i\theta}$, $z^5 = r^5\, e^{i5\theta}$.
Donc $r = \sqrt{2}$ et $\theta \equiv \frac{\pi}{20}[\frac{2\pi}{5}]$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 + (1-i)z - i = 0$.
3. $x^2 - (3+4i)x - 1 + 5i = 0$.
4. $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Correction 9

1. $z^2 + z + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.
   Donc $z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
   $\mathcal{S} = \{\overline{j}; j\}$.
2. $z^2 + (1-i)z - i = 0$. $\Delta = (1-i)^2 + 4i = 2i$.
   On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = 2i$.
   On a $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$.
   Donc $a^2 - b^2 = 0$, $a^2 + b^2 = 2$ et $2ab = 2$.
   Càd $a = b = 1$ ou $a = b = -1$.
   Donc $\Delta = (1+i)^2$.
   On obtient $z_1 = \dfrac{-(1-i) - (1+i)}{2} = -1$ et $z_2 = \dfrac{-(1-i) + (1+i)}{2} = i$.
   $\mathcal{S} = \{-1; i\}$.
3. $x^2 - (3+4i)x - 1 + 5i = 0$. $\Delta = (3+4i)^2 - 20i + 4 = -3 + 4i$.
   On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = -3 + 4i$.
   On a $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$.
   Donc $a^2 - b^2 = -3$, $a^2 + b^2 = 5$ et $2ab = 4$.
   Càd $(a = 1$ et $b = 2)$ ou $(a = -1$ et $b = -2)$.
   Donc $\Delta = (1+2i)^2$.
   On obtient $z_1 = \dfrac{3 + 4i - (1+2i)}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = \dfrac{3 + 4i + (1+2i)}{2} = \dfrac{4+6i}{2} = 2 + 3i$.
   $\mathcal{S} = \{1+i; 2+3i\}$.
4. $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$. $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$.
   Donc $z_1 = \dfrac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ et $z_2 = \dfrac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
   $\mathcal{S} = \{e^{-i\theta}; e^{i\theta}\}$.

Exercice 10

Trouver deux complexes z_1 et z_2 dont la somme S est $5 - 14i$ et dont le produit P est $-24 - 10i$.

Correction 10

z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ càd $x^2 - (5 - 14i)x - 24 - 10i = 0$.
$\Delta = (5 - 14i)^2 + 96 + 40i = 25 - 196 - 140i + 96 + 40i = -75 - 100i = -25(3 + 4i)$.
On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = 3 + 4i$.
On a $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$.
Donc $a^2 - b^2 = 3$, $a^2 + b^2 = 5$ et $2ab = 4$.
Càd ($a = 2$ et $b = 1$) ou ($a = -2$ et $b = -1$).
Donc $\Delta = (5i(2 + i))^2 = (-5 + 10i)^2$.
On obtient $z_1 = \dfrac{5 - 14i - (-5 + 10i)}{2} = 5 - 12i$ et $z_2 = \dfrac{5 - 14i + (-5 + 10i)}{2} = -2i$.

Exercice 11

En utilisant la formule de Moivre, mettre $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Correction 11

$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$.
D'où $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et
$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3(1 - \sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Exercice 12

1. Linéariser à l'aide des formules d'Euler $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.
2. En déduire une primitive de $\cos^4 x$.

Correction 12

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + 4\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right) \\ &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{(2i)^4}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{2^3}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right) \\ &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3).\end{aligned}$$

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}(\sin 4x + 8\sin 2x + 12x).$$