Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 3 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Mettre sous forme trigonométrique et exponentielle les deux complexes suivants : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -5i$.

Exercice 2

Déterminer $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10}$.

Exercice 3

Donner les conjugués des complexes suivants : $z_1 = 2i - 1$, $z_2 = 3 - \sqrt{2}$ et $z_3 = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Déterminer les formes algébrique et trigonométrique du complexe $z = \dfrac{(1-i)^{2000}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{999}}$.

Exercice 5

1. Déterminer la forme trigonométrique de $1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]0; 2\pi[$ (mettre $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur).
2. Même question avec $\theta \in]2\pi; 4\pi[$.
3. Pour $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$, simplifier $z = \dfrac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$.

Exercice 6

Trouver les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$ en utilisant les formes algébriques dans un premier temps, puis en utilisant les formes trigonométriques.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Déterminer les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.
2. Donner une interprétation géométrique de ces solutions.

3. Etudier le cas particulier $n = 3$.
4. Etudier le cas particulier $n = 4$.
5. Que peut-on dire des autres racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non nul Z si l'on en connaît une?
6. Montrer que la somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité vaut 0.

Exercice 8

Résoudre $z^5 = 4(1+i)$ et représenter les solutions dans le plan.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes:

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 + (1-i)z - i = 0$.
3. $x^2 - (3+4i)x - 1 + 5i = 0$.
4. $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Trouver deux complexes z_1 et z_2 dont la somme S est $5 - 14i$ et dont le produit P est $-24 - 10i$.

Exercice 11

En utilisant la formule de Moivre, mettre $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 12

1. Linéariser à l'aide des formules d'Euler $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.
2. En déduire une primitive de $\cos^4 x$.