Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 4 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que la suite u de terme général $\dfrac{2n+3}{n+1}$ est décroissante.

Correction 1

1ère méthode

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

2ème méthode

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2n+5}{n+2}}{\dfrac{2n+3}{n+1}} = \frac{2n^2+7n+5}{2n^2+7n+6} = 1 - \frac{1}{2n^2+7n+6}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$

3ème méthode

On pose $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ donc sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0.$

Exercice 2

En utilisant la définition de la limite, montrer que :

1. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = 0.$
2. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2+3}{n^2+1} = 2.$
3. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty.$

Correction 2

1. On doit montrer que :$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{2}{n^2} < \varepsilon.$

   $$(0 <)\frac{2}{n^2} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, on pose $n_0 = E\left(\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right) + 1$. On a bien $n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

2. $\left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| = \left|\dfrac{1}{n^2+1}\right| = \dfrac{1}{n^2+1}$.
   $(0 <)\dfrac{1}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.
   Problème si $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 0$.

   Méthode 1 : on a $n^2 > |\frac{1}{\varepsilon} - 1| \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. On peut poser $n_0 = E\left(\sqrt{\left|\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right|}\right) + 1$.

   Méthode 2 : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Si $\varepsilon \geq 1$, on pose $n_0 = 1$. Si $\varepsilon < 1$, on pose $n_0 = E\left(\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}\right) + 1$.

   On a bien $n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{2n^2+3}{n^2+1} - 2\right| < \varepsilon$.

3. $3\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > \left(\dfrac{A}{3}\right)^2$

   Donc $\forall A \in \mathbb{R}_+$, on pose $n_0 = E\left(\left(\dfrac{A}{3}\right)^2\right) + 1$. On a bien $n > n_0 \Rightarrow 3\sqrt{n} > A$.

Exercice 3

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que u est majorée par 2.

2. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

Correction 3

1. On va montrer en même temps que u est bien définie.
   Pour cela il faut que, pour tout entier n, on ait $u_n \geq -2$.
   On va donc montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.
   - Vrai au rang 1.
   - On suppose que $u_n \leq 2$. On a $u_n + 2 \leq 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \leq \sqrt{4} = 2$.

2. $x \mapsto x + 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Donc $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante sur $]-2; +\infty[$.
   $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3} > u_0$.
   Donc u est croissante.
   Or u est majorée donc u est convergente.
   Sa limite est solution de $x = f(x)$ càd $x = \sqrt{2 + x}$.
   On a $x \geq 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$.
   $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
   Puisque $l \geq 0$, on obtient $l = 2$.

Exercice 4

Soit u la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Montrer que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et en déduire que u converge vers une limite $e \leq 3$.

Correction 4

Démonstration par récurrence :
- Vrai aux rangs 0 et 1.
- On suppose vrai au rang p et on peut supposer $p \geq 1$. $\frac{1}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{p!} \leq \frac{1}{p+1} \times \frac{1}{2^{p-1}}$

On a $p+1 \geq 2$ donc $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{(p+1)!} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1}{2^p}$.

On a $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$.

$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ est la somme de n premiers termes d'une suite géomètrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc $I_n = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 2$

La suite I est majoré par 2, puisque $u_n \leq 1 + I_n$, la suite u est majorée par 3. La suite u est clairement croissante (et majorée), elle est donc convergente.

Exercice 5

Déterminer tous les réels a tels que $[1;2]$ soit un voisinage de a (justifier).

Correction 5

Réponse : $]1,2[$.
- En effet, pour tout $a \in]1,2[$, on pose $h = \inf\left(\frac{a-1}{2}; \frac{2-a}{2}\right)$.

If faut montrer que $\forall h > o,\ ]a-h; a+h[\subset [1,2]$ càd $a - h > 1$ et $a + h < 2$.

Or $h \leq \frac{a-1}{2}$ càd $a - 2h \geq 1$ et $h \leq \frac{2-a}{2}$ càd $a + 2h \leq 2$.

Donc $a - h > a - 2h \geq 1$ et $a + h < a + 2h \leq 2$.
- Si $a \in]-\infty; 1]$, $\forall h > 0$, $a - \frac{h}{2} \in]a-h; a+h[$ et $a - \frac{h}{2} \notin [1;2]$.
- Si $a \in [2; +\infty[$, $\forall h > 0$, $a + \frac{h}{2} \in]a-h; a+h[$ et $a + \frac{h}{2} \notin [1;2]$.

Exercice 6

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a) \nRightarrow V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

Correction 6

Contre-exemple 1: $a = 0$, $V_1 =]-2; 1[$ et $V_2 =]-1; 2[$.

Contre-exemple 2: $a = +\infty$, $V_1 = \{0\} \cup]2; \infty[$ et $V_2 = \{1\} \cup]2; \infty[$

Exercice 7

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La loi $\cup$ est-elle une loi de composition interne sur $\mathcal{V}(a)$?

Correction 7

Réponse : oui, pour la démonstration, on sépare les cas.
• Si $a = +\infty$.
$V_1 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists\, A_1 > 0 \,/\,]A_1; +\infty[\subset V_1$.
$V_2 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists\, A_2 > 0 \,/\,]A_2; +\infty[\subset V_2$.
On a, par exemple, $]A_1; +\infty[\subset V_1 \subset V_1 \cup V_2$.
• Si $a = -\infty$: similaire.
• Si $a \in \mathbb{R}$.
$V_1 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists\, h_1 > 0 \,/\,]x_0 - h_1; x_0 + h_1[\subset V_1$.
$V_2 \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists\, h_2 > 0 \,/\,]x_0 - h_2; x_0 + h_2[\subset V_2$.
On a, par exemple, $]x_0 - h_1; x_0 + h_1[\subset V_1 \subset V_1 \cup V_2$.

Exercice 8

Montrer que 0 est adhérent à $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}\right]$.

Correction 8

If faut montrer que $\forall h > o,\ ]-h; h[\cap \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}\right] \neq \emptyset$.
On suffit de montrer que $\forall h > o,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* \,/\, \dfrac{1}{n} \in]-h; h[$.
Or $\dfrac{1}{n} < h \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{h}$. On prend donc $n = E\left(\dfrac{1}{h}\right) + 1$.

Exercice 9

Pour $x_0, l \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = l$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 - h) = l$.

Correction 9

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \,/\, \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.
   $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \,/\, \forall h \in \mathbb{R} \,/\, x_0 + h \in D_f$, on a $|h| < \eta \Rightarrow |f(x_0 + h) - l| < \varepsilon$.
   Il suffit donc de poser $h = x - x_0$ et on a bien $|f(x_0+h) - l| = |f(x_0 + x - x_0) - l| = |f(x) - l|$.
2. Idem avec $x = x_0 - h$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, par la définition, que :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \alpha x^n = 0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Correction 10

1. $\forall\varepsilon > 0,\ |x^n| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x| < (\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$.
   $\forall\varepsilon > 0$, on pose $\eta = (\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$.
   On a bien $|x| < \eta \ \Rightarrow\ |x^n - 0| < \varepsilon$.

2. Si $\alpha = 0$, on a bien toujours $\forall\varepsilon > 0,\ |\alpha x^n - 0| < \varepsilon$.
   Si $\alpha \neq 0$, $\forall\varepsilon > 0,\ |\alpha x^n| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x| < \left(\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   $\forall\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \left(\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{n}}$.
   On a bien $|x| < \eta \ \Rightarrow\ |\alpha x^n - 0| < \varepsilon$.

Exercice 11

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et n pair.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et n impair.

Correction 11

1. On a $D_f = [0; +\infty[$.
   $\forall A > 0,\ \sqrt{x} > A \ \Leftrightarrow\ x > A^2$
   On pose $B = A^2$, on a bien $x > B \ \Rightarrow\ \sqrt{x} > A$.

2. $\forall A > 0,\ x^n > A \ \Leftrightarrow\ x > A^{\frac{1}{n}}$
   On pose $B = A^{\frac{1}{n}}$, on a bien $x > B \ \Rightarrow\ x^n > A$.

3. $\forall A > 0,\ \ln x > A \ \Leftrightarrow\ x > \exp A$.
   On pose $B = \exp A$, on a bien $x > B \ \Rightarrow\ \ln x > A$.

4. $\forall A > 0,\ \exp x > A \ \Leftrightarrow\ x > \ln A$.
   On pose $B = \sup(0, \ln A)$, on a bien $x > B \ \Rightarrow\ \exp x > A$.

5. Si n est pair, $\forall A > 0,\ x^n > A \ \Leftrightarrow\ x < -\left(A^{\frac{1}{n}}\right)$ ou $x > A^{\frac{1}{n}}$
   On pose $B = -\left(A^{\frac{1}{n}}\right) < 0$, on a bien $x < B \ \Rightarrow\ x^n > A$.

6. Si n est impair, $\forall A < 0,\ x^n < A \ \Leftrightarrow\ x < -(-A)^{\frac{1}{n}}$
   On pose $B = -(-A)^{\frac{1}{n}}$, on a bien $x < B \ \Rightarrow\ x^n < A$.

Exercice 12

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2$.

Correction 12

1. $\forall \varepsilon > 0,\ |\frac{1}{x}| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x| > \frac{1}{\varepsilon}$
   On pose donc $A = \sup\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$ car $\varepsilon > 0$.
   On a bien $x > A \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

2. $\forall \varepsilon > 0,\ |\frac{1}{x^n}| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x| > \frac{1}{(\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}$
   On pose donc $A = \sup\left(0, \frac{1}{(\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{1}{(\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}$ car $\varepsilon > 0$.
   On a bien $x > A \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

3. On a $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
   $\frac{2x+3}{x+1} - 2 = \frac{1}{x+1}$ et $\frac{1}{x+1} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.
   On pose donc $A = \sup\left(0; \frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ et on a bien $x > A \ \Leftrightarrow\ \left|\frac{2x+3}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$.

Exercice 13

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$. (On pourra, dans un premier temps, montrer que $\forall x \geq 0,\ |\sqrt{x} - 2| \leq \frac{|x-4|}{2}$)
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Correction 13

1. On a $D_f = [0; +\infty[$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\eta = \varepsilon^2$, on a bien $x \geq 0$ et $|x| < \eta \ \Rightarrow\ \sqrt{x} < \varepsilon$.

2. $|\sqrt{x} - 2| = \left|\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right|$.
   Or $\forall x > 0,\ \sqrt{x} + 2 > 2$ d'où $\forall x \geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}$ et donc $|\sqrt{x} - 2| \leq \frac{|x-4|}{2}$
   On pose donc $\eta = 2\varepsilon$.
   On a bien $|x - 4| < \eta \ \Rightarrow\ |\sqrt{x} - \sqrt{2}| < \varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0,\ |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| < \varepsilon$
   Vrai pour $x_0 = 0$. On suppose maintenant que $x_0 \neq 0$. Or $\forall x \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geq \sqrt{x_0}$ et donc $\left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}\right| < \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}}\right|$.
   D'où, $x - x_0 < \varepsilon\sqrt{x_0} \ \Rightarrow\ |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$
   On pose donc $\eta = \sqrt{x_0}\varepsilon$.
   On a bien $|x - x_0| < \eta \ \Rightarrow\ |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$.

Exercice 14

Déterminer l'existence et l'éventuelle limite de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{\sup(x;0)}{x}$ et $a = 0$.

2. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x+7 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ et $a = 2$.

3. $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ -x+7 & \text{si} \quad x > 2 \\ 6 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ et $a = 2$.

4. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ et $a = +\infty$.

5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $a = +\infty$.

6. $f(x) = x + \cos(x^2)$ et $a = -\infty$.

Correction 14

1. f n'est pas définie en 0.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $2 \in D_f$.
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$. Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$

3. f est définie sur $\mathbb{R}$ et $2 \in D_f$.
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$ mais $f(2) = 6$.
   Si la limite existait, elle devrait être égale à $f(2)$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 < \dfrac{1}{x^2+1} < \dfrac{1}{x^2}$ donc $0 < \dfrac{x}{x^2+1} < \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 1$.

5. On a $0 \leq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\dfrac{1}{x}\right|$.
   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{1}{x}\right| = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 0$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

6. $-1 \leq \cos(x^2) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \cos(x^2) \leq x + 1$.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \cos(x^2) = -\infty$.