Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 4 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que la suite u de terme général $\dfrac{2n+3}{n+1}$ est décroissante.

Exercice 2

En utilisant la définition de la limite, montrer que :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0.$ 2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+1} = 2.$ 3. $\lim\limits_{n \to +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty.$

Exercice 3

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que u est majorée par 2.
2. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

Soit u la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Montrer que $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et en déduire que u converge vers une limite $e \leq 3$.

Exercice 5

Déterminer tous les réels a tels que $[1;2]$ soit un voisinage de a (justifier).

Exercice 6

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(a) \not\Rightarrow V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

Exercice 7

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La loi $\cup$ est-elle une loi de composition interne sur $\mathcal{V}(a)$?

Exercice 8

Montrer que 0 est adhérent à $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n^2}; \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 9

Pour $x_0, l \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = l.$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 - h) = l.$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, par la définition, que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \alpha x^n = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Exercice 11

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et n pair.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et n impair.

Exercice 12

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2.$

Exercice 13

En utilisant la définition des limites, montrer que :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2.$ (On pourra, dans un premier temps, montrer que $\forall x \geq 0, \ |\sqrt{x} - 2| \leq \dfrac{|x-4|}{2}$)
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+.$

Exercice 14

Déterminer l'existence et l'éventuelle limite de f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{\sup(x;0)}{x}$ et $a = 0.$
2. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 7 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ et $a = 2.$
3. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 7 & \text{si} \quad x > 2 \\ 6 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ et $a = 2.$
4. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ et $a = +\infty.$
5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $a = +\infty.$
6. $f(x) = x + \cos(x^2)$ et $a = -\infty.$