



# Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 5

1er Semestre

2003/2004

## Exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = (x_0)^n$ .

(On rappelle que  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ )

2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha x^n = \alpha (x_0)^n \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

3. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  pour tout polynôme  $P$  càd  $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ .

4. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$  pour toute fraction rationnelle  $R$  càd  $\forall R \in \mathbb{R}(X)$  telle que  $x_0 \in D_R$ .

## Exercice 2

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$ .

## Exercice 3

Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$  et  $g(x) = x^2 + 2x$ .

1. (a) A-t-on  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ?

(b) A-t-on  $f \underset{+\infty}{\sim} g$ ?

2. (a) A-t-on  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ?

(b) A-t-on  $f \underset{0}{\sim} g$ ?

## Exercice 4

1. En admettant que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , démontrer que  $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4 + x^2}$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4 + x^2}$ .

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4 + x^2}$ .

### Exercice 5

1. Montrer que  $\sqrt{x^3 + x} \underset{+\infty}{\sim} x\sqrt{x}$ .

2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^3+x}}\right)$ .

### Exercice 6

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$ .

### Exercice 7

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ .

### Exercice 8

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$ .

### Exercice 9

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

### Exercice 10

Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+5} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\right)$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+5) \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x+3}\right)$ .

### Exercice 11

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ .

### Exercice 12

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ .