Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 6 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 1

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$
On suppose connu que $\lim\limits_{h \to 0} \cos h = 1$ et que $\lim\limits_{h \to 0} \sin h = 0$.
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \sin(a+h) = \sin a$ càd $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x+a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
Déterminer suivant les valeurs de a, la continuité de f_a en $x_0 = 1$.

Correction 2

f_a est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1 : +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to 1^-} f_a(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f_a(x) = -1+a$.
Donc f_a est continue en 1 si et seulement si $-1+a = 2$ càd $a = 3$

Exercice 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-2x) + \ln(1+2x)}{x^2}$.
Déterminer D_f.
Peut-on prolonger f par continuité?

Correction 3

Il faut $1-2x > 0$, $1+2x > 0$ et $x \neq 0$.
Càd $x < \dfrac{1}{2}$, $x > -\dfrac{1}{2}$ et $x \neq 0$.
D'où $D_f = \left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[\cup \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$.
$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$
Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $-\dfrac{1}{2}$ et en $\dfrac{1}{2}$.
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-2x)+\ln(1+2x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-4x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-4x^2)}{-4x^2} \times (-4) = -4$.
Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 4

Le produit de deux fonctions discontinues (non continues) est il discontinu?

Correction 4

Non, par exemple, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Exercice 5

Montrer que tout polynôme de degré 3 s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Correction 5

Soit P un polynôme de degré 3.
On note de la même façon la fonction polynômiale associée à P (dfinie sur $\mathbb{R}$).
$\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = - \lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$.
Plus précisement, si $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ donc il existe a tel que $P(a) > 1$. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ donc il existe b tel que $P(b) < -1$.
0 est compris entre $P(a)$ et $P(b)$ et P est continue donc il existe x compris entre a et b tel que $P(x) = 0$.
On peut généraliser cette propriété : tout polynôme de degré impaire s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \inf(2, x)$
2. Etudier la continuité de f.
3. Etudier la dérivabilité de f.

Correction 6

Si $x \in]-\infty; 2[$, $f(x) = x$ donc f est continue et dérivable sur $]-\infty; 2[$ et $f'(x) = 1$.
Si $x \in]2; +\infty[$, $f(x) = 2$ donc f est continue et dérivable sur $]2; +\infty[$ et $f'(x) = 0$.
On cherche donc à savoir si f est continue en 2.
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ donc f est continue en 2.
$\lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x)$ donc f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 7

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction racine carrée en un point $x_0 > 0$
2. Etudier la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0.
3. Représenter la fonction racine carrée.

Correction 7

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. On a $D_f = \mathbb{R}^+$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

- Faire un dessin pour la tangente verticale.

Exercice 8

Etudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

Correction 8

Soit $f(x) = |x|$.
$f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1$
$f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$
Donc f n'est pas dérivable en 0.
(Faire un dessin pour la tangente)

Exercice 9

Montrer par la définition que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée.

Correction 9

Soit $f(x) = \sin x$. On a $D_f = \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R}$:
$\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \dfrac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos a \dfrac{\sin h}{h} = \sin a \times \dfrac{\cos h - 1}{h^2} \times h + \cos a \dfrac{\sin h}{h}.$
Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h^2} = \dfrac{1}{2}.$
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a.$
Et enfin $(\sin)' = \cos.$

Exercice 10

Soit u une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la règle sur la dérivée d'une fonction composée, déterminer les dérivées suivantes en précisant les conditions nécessaires sur u :

1. $\cos u$
2. $\sin u$
3. e^u
4. u^n où $n \in \mathbb{N}$
5. u^n où $n \in \mathbb{Z}$
6. u^α où $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $\sqrt{u}$

8. $\ln|u|$

Correction 10

1. $-u'\sin u$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
2. $u'\cos u$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
3. $u'e^u$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
4. $nu'u^{n-1}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
5. $nu'u^{n-1}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas.
6. $\alpha u'u^{\alpha-1}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et est strictement positive.
7. $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et est strictement positive.
8. $\dfrac{u'}{u}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée f' n'est pas continue.

Correction 11

• f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ car f est la composée de fonctions dérivables sur ces intervalles. On a : $\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$,
$f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
• En 0, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(x)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.
donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
• $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ n'existe pas. Donc f' n'est pas continue en 0.

Exercice 12

Montrer que : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Correction 12

Théorème des accroissements finis.
$\exists\,[a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $x, y \in [a,b]$.
sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a de plus $\forall x \in \mathbb{R},\ |(\sin)'x| = |\cos x| \leq 1$
On obtient le résultat d'après un des corollaires du cours.

Exercice 13

Montrer que : $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}\ /\ 0 < a < b$, on a $1 - \dfrac{a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1$.

Correction 13

$\forall a, b \in \mathbb{R} \;/\; 0 < a < b,\ \ln \dfrac{b}{a} = \ln b - \ln a.$
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[\;/\; \ln b - \ln a = (\ln)'(c) \times (b - a)$.
Donc $\exists c \in]a, b[\;/\; \ln b - \ln a = \dfrac{b-a}{c}$.
Mais $a < c < b \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a} \;\Rightarrow\; 1 - \dfrac{a}{b} < \dfrac{b-a}{c} < \dfrac{b}{a} - 1.$

Exercice 14

Soit f une fonction dérivable à gauche et à droite en a.
Montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

Correction 14

$\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h}$
$= \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} + \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h} \right)$
$= \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} + \dfrac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right)$.
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \dfrac{1}{2} \times (f'(a) + f'(a)) = f'(a)$.

Exercice 15

Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan x > x$.

Correction 15

Méthode 1 : Soit $f(x) = \tan x - x$.
f est dérivable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$
On a donc f croissante et $f(x) \geq f(0)$.
D'après le théorème des accroissements finis,
$\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\exists c \in]0, x[\;/\; f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$.
Donc $\tan(-x) = x \tan^2 c > 0$.

Méthode 2 : Soit $f(x) = \tan x$.
f est dérivable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 1$
On a donc f croissante et $f(x) \geq f(0)$.
D'après le théorème des accroissements finis,
$\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\exists c \in]0, x[\;/\; f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$.
Donc $\tan(x) = x \tan^2 c > x$.