Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 6 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Montrer que la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f_a la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ -x+a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
Déterminer suivant les valeurs de a, la continuité de f_a en $x_0 = 1$.

Exercice 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1-2x)+\ln(1+2x)}{x^2}$.
Déterminer D_f.
Peut-on prolonger f par continuité?

Exercice 4

Le produit de deux fonctions discontinues (non continues) est il discontinu?

Exercice 5

Montrer que tout polynôme de degré 3 s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \inf(2, x)$
2. Etudier la continuité de f.
3. Etudier la dérivabilité de f.

Exercice 7

1. Déterminer le nombre dérivé de la fonction racine carrée en un point $x_0 > 0$
2. Etudier la dérivabilité de la fonction racine carrée en 0.
3. Représenter la fonction racine carrée.

Exercice 8

Etudier la dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

Exercice 9

Montrer par la définition que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée.

Exercice 10

Soit u une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la règle sur la dérivée d'une fonction composée, déterminer les dérivées suivantes en précisant les conditions nécessaires sur u :

1. $\cos u$
2. $\sin u$
3. e^u
4. u^n où $n \in \mathbb{N}$
5. u^n où $n \in \mathbb{Z}$
6. u^α où $\alpha \in \mathbb{R}$
7. $\sqrt{u}$
8. $\ln |u|$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée f' n'est pas continue.

Exercice 12

Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

Exercice 13

Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} \ / \ 0 < a < b$, on a $1 - \dfrac{a}{b} < \ln \dfrac{b}{a} < \dfrac{b}{a} - 1$.

Exercice 14

Soit f une fonction dérivable à gauche et à droite en a.
Montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

Exercice 15

Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $\forall x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan x > x$.