Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Analyse

Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)

Td 7 **1er Semestre** **2003/2004**

Exercice 1

Démontrer les formules sur le developpement de $\mathrm{ch}\,(a+b)$, $\mathrm{ch}\,(a-b)$, $\mathrm{ch}\,(2a)$, $\mathrm{sh}\,(a+b)$, $\mathrm{sh}\,(a-b)$ et $\mathrm{sh}\,(2a)$.

Correction 1

$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \dfrac{1}{4}(e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b}) = \dfrac{1}{4}(e^{a+b}+e^{a-b}+e^{b-a}+e^{-a-b})$.
$\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \dfrac{1}{4}(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b}) = \dfrac{1}{4}(e^{a+b}-e^{a-b}-e^{b-a}+e^{-a-b})$.
Donc $\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \dfrac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b}) = \mathrm{ch}\,(a+b)$.
On en déduit $\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\,(a+(-b)) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,(-b) + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,(-b) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b$.
Et $\mathrm{ch}\,(2a) = \mathrm{ch}\,(a+a) = \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,a + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a$.
$\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b = \dfrac{1}{4}(e^a-e^{-a})(e^b+e^{-b}) = \dfrac{1}{4}(e^{a+b}+e^{a-b}-e^{b-a}-e^{-a-b})$.
$\mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \dfrac{1}{4}(e^a+e^{-a})(e^b-e^{-b}) = \dfrac{1}{4}(e^{a+b}-e^{a-b}+e^{b-a}-e^{-a-b})$.
Donc $\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b = \dfrac{1}{2}(e^{a+b}-e^{-a-b}) = \mathrm{sh}\,(a+b)$.
On en déduit $\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\,(a+(-b)) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,(-b) + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,(-b) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b$.
Et $\mathrm{sh}\,(2a) = \mathrm{sh}\,(a+a) = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a + \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,a = 2\mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,a$.

Exercice 2

Soit u une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la règle sur la dérivée d'une fonction composée, déterminer les dérivées suivantes en précisant les conditions nécessaires sur u :

1. $\arcsin u$	2. $\arccos u$	3. $\arctan u$
4. $\mathrm{sh}\,u$	5. $\mathrm{ch}\,u$	6. $\mathrm{th}\,u$
7. $\mathrm{argsh}\,u$	8. $\mathrm{argch}\,u$	9. $\mathrm{argth}\,u$

Correction 2

1. $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et à valeurs dans $]-1;1[$.

2. $-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et à valeurs dans $]-1;1[$.

3. $\dfrac{u'}{1+u^2}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
4. $u'\mathrm{ch}\, u$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
5. $u'\mathrm{sh}\, u$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
6. $\dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
7. $\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable.
8. $\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et à valeurs dans $]1;+\infty[$.
9. $\dfrac{u'}{1-u^2}$ dérivation sur tout intervalle où u est dérivable et à valeurs dans $]-1;1[$.

Exercice 3

Etudier la dérivabilité des fonctions $f(x) = \arctan(\mathrm{th}\, x)$ et $g(x) = \arctan(\mathrm{sh}\, 2x)$. En déduire une relation entre f et g.

Correction 3

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$.
arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1-\mathrm{th}^2 x}{1+\mathrm{th}^2 x} = \dfrac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2x}$.
sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{2\mathrm{ch}\, 2x}{1+\mathrm{sh}^2 2x} = 2\dfrac{\mathrm{ch}\, 2x}{\mathrm{ch}^2 2x} = 2\dfrac{1}{\mathrm{ch}\, 2x} = 2f'(x)$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2f(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
Mais $g(0) = 0 = f(0)$ donc $c = 0$.

Exercice 4

Etudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. En déduire la valeur de $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ lorsque $x > 0$ puis lorsque $x < 0$.

Correction 4

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Sur ces intervalles, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = 0$.
Donc $f = cste$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
$f(1) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
$f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $\forall x < 0,\ f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 5

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire $\displaystyle\int \frac{\arctan t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $]0;+\infty[$ en utilisant une intégration par parties.

Correction 5

1. $\dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2} = \dfrac{a+at^2+bt^2+ct}{t(1+t^2)}$.
   Donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$.
2. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   On a $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{1+t^2}$.
   D'où $\displaystyle\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.
3. L'application $t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   On pose $u' = \dfrac{1}{t^2}$ $\quad u = -\dfrac{1}{t}$
   $v = \arctan t \quad v' = \dfrac{1}{1+t^2}$
   Donc $\displaystyle\int \frac{\arctan t}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\arctan t + \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{\arctan t}{t}$

Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $\dfrac{t}{\cos^2 t}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction 6

$t \mapsto \dfrac{t}{\cos^2 t}$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.
On pose $u' = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ $\quad u = \tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.
$v = t \quad v' = 1$
Donc $\displaystyle\int \frac{t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = t\tan t - \int \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = t\tan t + \ln|\cos t| = t\tan t + \ln\cos t$.

Exercice 7

A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int e^t \sin t\,\mathrm{d}t$.

Correction 7

$t \mapsto e^t \sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On pose $I = \displaystyle\int e^t \sin t \,\mathrm{d}t$
On pose $u' = e^t \quad u = e^t$.
$v = \sin t \quad v' = \cos t$
Donc $I = e^t \sin t - \displaystyle\int e^t \cos t \,\mathrm{d}t$
On pose $u' = e^t \quad u = e^t$.
$v = \cos t \quad v' = -\sin t$
Donc $I = e^t \sin t - e^t \cos t - \displaystyle\int e^t \sin t \,\mathrm{d}t = e^t \sin t - e^t \cos t - I$
d'où $2I = e^t(\sin t - \cos t)$ càd $I = \dfrac{1}{2} e^t(\sin t - \cos t)$.

Exercice 8

Déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 - 2t + 2} \,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

Correction 8

On a $t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 2t + 2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$\displaystyle\int \frac{1}{t^2 - 2t + 2} \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t-1)^2 + 1} \,\mathrm{d}t = \arctan(t-1)$.

Exercice 9

En utilisant le changement de variable $u = \cos t$, déterminer : $\displaystyle\int \cos^3 t \, \sin^3 t \,\mathrm{d}t$ sur $]0; \pi[$.

Correction 9

$\cos t$ est continue sur $I =]0; \pi[$.
$\cos t$ est strictement décroissante sur I.
u est dérivable sur I et $u' = -\sin t$ ne s'annule pas sur I.
$\cos(I) =]-1, 1[$
$v = u^{-1} = \arccos$ et $v' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$
Sur $]0; \pi[$, on a $\sin^3 t = (\sqrt{1 - \cos^2 t})^3$.
On cherche G une primitive de $-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times \cos^3(\arccos t) \left(\sqrt{1 - \cos^2(\arccos t)}\right)^3 = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times t^3 \left(\sqrt{1 - t^2}\right)^3 = t^5 - t^3$.
On a donc $G = \dfrac{1}{6} t^6 - \dfrac{1}{4} t^4$.
D'où $\displaystyle\int \cos^3 t \, \sin^3 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{6} \cos^6 t - \frac{1}{4} \cos^4 t$.

Exercice 10

En utilisant le changement de variable $u = t^2$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^4} \,\mathrm{d}t$ sur $]0; +\infty[$.

Correction 10

$u = t^2$ est continue sur $I =]0; +\infty[$.
u est strictement croissante sur I.
u est dérivable sur I et $u' = -2t$ ne s'annule pas sur I.
$u(I) =]0; +\infty[$
$v = u^{-1} = \sqrt{t}$ et $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
On cherche G une primitive de $\dfrac{1}{2\sqrt{t}} \times \dfrac{\sqrt{t}}{1 + (\sqrt{t})^4} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$.
On a donc $G = \dfrac{1}{2}\arctan t$.
D'où $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan t^2$.

Exercice 11

En utilisant le changement de variable $u = \arccos t$, déterminer : $\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ sur $]-1; 1[$.

Correction 11

$\arccos t$ est continue sur $I =]-1; 1[$.
$\arccos t$ est strictement décroissante sur I.
u est dérivable sur I et $u' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ne s'annule pas sur I.
$\arccos(I) =]0, \pi[$
Sur $]0, \pi[$, $\sin t > 0$.
$v = u^{-1} = \cos$ et $v' = -\sin t$
On cherche G une primitive de $-\sin t \times \sqrt{1 - \cos^2 t} = -\sin^2 t = -\dfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)$.
On a donc $G = -\dfrac{1}{2}(t - \dfrac{1}{2}\sin 2t) = \dfrac{1}{2}\sin t \cos t - \dfrac{1}{2}t = \dfrac{1}{2}\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} - \dfrac{1}{2}t$.
D'où $\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cos(\arccos t)\sqrt{1 - \cos^2(\arccos t)} - \frac{1}{2}\arccos t = \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\arccos t$.

Exercice 12

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+t)} = \dfrac{at}{1+t^2} + \dfrac{b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t}$.
2. En déduire $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)}\,\mathrm{d}t$ sur $]-1; +\infty[$.
3. En utilisant le changement de variable $u = \tan t$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{\tan t}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction 12

1. $\dfrac{at}{1+t^2} + \dfrac{b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t} = \dfrac{(a+c)t^2 + (a+b)t + (b+c)}{(1+t^2)(1+t)}$.
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+c & = & 0 \\ a+b & = & 1 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+c & = & 0 \\ b-c & = & 1 \\ b+c & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1/2 \\ b & = & 1/2 \\ c & = & -1/2 \end{array}\right.$$
Donc $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+t)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+t}\right)$

2. $\displaystyle\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t - \ln|1+t|\right)$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t - \ln(1+t)\right).$

3. $u = \tan t$ est continue sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
u est strictement croissante sur I.
u est dérivable sur I et $u' = 1 + \tan^2 t$ ne s'annule pas sur I.
$u(I) =]0; +\infty[$
$v = u^{-1} = \arctan t$ et $v' = \dfrac{1}{1+t^2}$
On cherche G une primitive de $\dfrac{1}{1+t^2} \times \dfrac{\tan(\arctan t)}{1+\tan(\arctan t)} = \dfrac{t}{(1+t^2)(1+t)}$.
On a donc $G = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t - \ln(1+t)\right)$.
D'où $\displaystyle\int \frac{\tan t}{1+\tan t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 t) + t - \ln(1+\tan t)\right)$.

Exercice 13

En utilisant le changement de variable $u = \arcsin t$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ sur $]0; 1[$.

Correction 13

$u = \arcsin$ est continue sur $I =]0; 1[$.
u est strictement croissante sur I.
u est dérivable sur I et $u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ne s'annule pas sur I.
$u(I) = \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$
Sur $]0, \pi[$, $\cos t > 0$.
$v = u^{-1} = \sin t$ et $v' = \cos t$
On cherche G une primitive de $\cos t \times \dfrac{(\sin t)^3}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = (\sin t)^3 = (1-\cos^2 t)\sin t = \sin t - \sin t \cos^2 t$.
On a donc $G(t) = -\cos t + \dfrac{1}{3}\cos^3 t$.
D'où $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\cos(\arcsin t) + \frac{1}{3}\cos^3(\arcsin t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{3}(\sqrt{1-t^2})^3 = \frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}(-3 + 1 - t^2) = -\frac{1}{3}(2+t^2)\sqrt{1-t^2}$.

Exercice 14

Soit f une fonction deux fois dérivable à gauche et à droite en a.
Montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$.

Correction 14

$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{2}f''(a) + h^2\varepsilon_1(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$
$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \dfrac{h^2}{2}f''(a) + h^2\varepsilon_2(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$

Donc $f(a+h)+f(a-h)=2f(a)+h^2f''(a)+h^2(\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)$.
On a donc $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)+\varepsilon_1(h)+\varepsilon_2(h)$. et le résultat.

Exercice 15

Déterminer le développement limité de f en x_0 à l'ordre n dans les cas suivants :

a.	$f(x)=2\cos x+x\sin x$	$x_0=0$	$n=3$
b.	$f(x)=2x^2+x+2$	$x_0=2$	$n=100$
c.	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	$x_0=0$	$n=4$

Correction 15

a. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^3)$
$2\cos x=2-x^2+o(x^3)$
$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$
$x\sin x=x^2+o(x^3)$
Donc $2\cos x+x\sin x=2+o(x^3)$

b. $f(x)=2(x-2)^2+8x-8+x+2=2(x-2)^2+9x-6=2(x-2)^2+9(x-2)+18-6$
$=12+9(x-2)+2(x-2)^2+x^{100}\times 0=12+9(x-2)+2(x-2)^2+o((x-2)^{100})$.

c. $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$.
$\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$.

Exercice 16

En utilisant les D.L., déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{1-\cos x}$.

Correction 16

$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)$.
$\sqrt{1+2x}=1+x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.
$e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.
Donc $e^x-\sqrt{1+2x}=x^2+o(x^2)$.
$1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

Exercice 17

En utilisant les D.L., déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x\cos x-\sin x}$.

Correction 17

$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5)$
$x\cos x=x-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{24}x^5+o(x^6)$

$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.
Donc $x\cos x - \sin x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
$\arcsin(0) = 0$
$(\arcsin)'(t) = (\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}) = (1-t^2)^{-1/2}$ donc $(\arcsin)'(0) = 1$
$(\arcsin)''(t) = t(1-t^2)^{-3/2}$ donc $(\arcsin)''(0) = 0$
$(\arcsin)^{(3)}(t) = -(1-t^2)^{-3/2} + 3t^2(1-t^2)^{-5/2}$ donc $(\arcsin)^{(3)}(0) = 1$
D'où $\arcsin x - x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ et
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x\cos x - \sin x} = \frac{1}{2}$.

Exercice 18

Déterminer le D.L. de $\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ en 0 à l'ordre 3.

Correction 18

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
$e^x + 1 = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
$\frac{1+e^x}{2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$.
$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + o(h^3)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) &= Tr_3\left((\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3)^2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3)^3\right) + o(x^3).\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3) + \frac{1}{3}(\frac{1}{8}x^3) + o(x^3).\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3).\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Exercice 19

Déterminer le D.L. de $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 à l'ordre 2.

Correction 19

On pose $x = 1 + h$ càd $h = x - 1$.
$\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2} = \ln(1+h) \times \frac{1}{1+2h+h^2}$.
$\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$.
$\frac{1}{1+2h+h^2} = Tr_2(1 - (2h+h^2) + (2h+h^2)^2) + o(h^2) = 1 - 2h + 3h^2 + o(h^2)$.
(Autre méthode : $\left(\frac{1}{1+h}\right)^2 = (1-h+h^2)^2 + o(h^4)$)
$\ln(1+h) \times \frac{1}{1+2h+h^2} = Tr_3[(h - \frac{1}{2}h^2) \times (1 - 2h + 3h^2)] + o(h^2) = h - \frac{1}{2}h^2 - 2h^2 + o(h^2) =$

$h - \frac{5}{2}h^2 + o(h^2)$.
Donc $\frac{\ln x}{x^2} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Autre méthode :

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} = x^{-2}\ln x \qquad f(1) = 0$
$f'(x) = -2x^{-3}\ln x + x^{-3} \qquad f'(1) = 1$
$f''(x) = 6x^{-3}\ln x - 5x^{-4} \qquad f''(1) = -5$

Exercice 20

Déterminer la valeur en 0 des quatres premières dérivées de $f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2}$.

Correction 20

$f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$
$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o(x^4).\\ &= 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 + x^4 - x^3 - 3x^4 + x^4 + o(x^4).\\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \frac{\cos x}{1+x+x^2} &= (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4)(1 - x + x^3 - x^4) + o(x^4)\\ &= 1 - x + x^3 - x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\\ &= 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{23}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Donc $f'(0) = -1$, $f^{(2)}(0) = -\frac{1}{2} \times (2!) = -1$,
$f^{(3)}(0) = \frac{3}{2} \times (3!) = 9$ et $f^{(4)}(0) = -\frac{23}{4!} \times (4!) = -23$.

Exercice 21

Déterminer le D.L. en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+2x-2}$ de la forme $ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Correction 21

On pose $x = \frac{1}{h}$ càd $h = \frac{1}{x}$.
$\sqrt{x^2+2x-2} = \sqrt{\frac{1}{h^2} + 2\frac{1}{h} - 2} = \sqrt{\frac{1+2h-2h^2}{h^2}} = \frac{\sqrt{1+2h-2h^2}}{h}$.
Or $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$.
Donc $\sqrt{1+2h-2h^2} = 1 + \frac{1}{2}(2h-2h^2) - \frac{1}{8}(2h-2h^2)^2 + o(h^2) = 1 + h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)$
Et $\frac{\sqrt{1+2h-2h^2}}{h} = \frac{1}{h} + 1 - \frac{3}{2}h + o(h)$.
D'où $\sqrt{x^2+2x-2} = x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.