# Université de Picardie Jules Verne

*Antenne de Beauvais*

# Analyse

**Niveau 1 : Unité fondamentale (Mias)**

| | | |
|---|---|---|
| **Td 7** | **1er Semestre** | **2003/2004** |

---

### Exercice 1

Démontrer les formules sur le developpement de $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a-b)$, $\operatorname{ch}(2a)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a-b)$ et $\operatorname{sh}(2a)$.

### Exercice 2

Soit $u$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la règle sur la dérivée d'une fonction composée, déterminer les dérivées suivantes en précisant les conditions nécessaires sur $u$ :

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\arcsin u$ | 2. $\arccos u$ | 3. $\arctan u$ |
| 4. $\operatorname{sh} u$ | 5. $\operatorname{ch} u$ | 6. $\operatorname{th} u$ |
| 7. $\operatorname{argsh} u$ | 8. $\operatorname{argch} u$ | 9. $\operatorname{argth} u$ |

### Exercice 3

Etudier la dérivabilité des fonctions $f(x) = \arctan(\operatorname{th} x)$ et $g(x) = \arctan(\operatorname{sh} 2x)$. En déduire une relation entre $f$ et $g$.

### Exercice 4

Etudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$. En déduire la valeur de $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ lorsque $x > 0$ puis lorsque $x < 0$.

### Exercice 5

1. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\dfrac{1}{t(1+t^2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{bt+c}{1+t^2}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt$ sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire $\displaystyle\int \frac{\arctan t}{t^2}\,dt$ sur $]0;+\infty[$ en utilisant une intégration par parties.

### Exercice 6

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de $\dfrac{t}{\cos^2 t}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Exercice 7**

A l'aide d'une double intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int e^t \sin t \, \mathrm{d}t$.

**Exercice 8**

Déterminer $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 - 2t + 2} \, \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 9**

En utilisant le changement de variable $u = \cos t$, déterminer : $\displaystyle\int \cos^3 t \, \sin^3 t \, \mathrm{d}t$ sur $]0; \pi[$.

**Exercice 10**

En utilisant le changement de variable $u = t^2$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{t}{1 + t^4} \, \mathrm{d}t$ sur $]0; +\infty[$.

**Exercice 11**

En utilisant le changement de variable $u = \arccos t$, déterminer : $\displaystyle\int \sqrt{1 - t^2} \, \mathrm{d}t$ sur $]-1; 1[$.

**Exercice 12**

1. Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\dfrac{t}{(1 + t^2)(1 + t)} = \dfrac{at}{1 + t^2} + \dfrac{b}{1 + t^2} + \dfrac{c}{1 + t}$.
2. En déduire $\displaystyle\int \frac{t}{(1 + t^2)(1 + t)} \, \mathrm{d}t$ sur $]-1; +\infty[$.
3. En utilisant le changement de variable $u = \tan t$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{\tan t}{1 + \tan t} \, \mathrm{d}t$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Exercice 13**

En utilisant le changement de variable $u = \arcsin t$, déterminer : $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1 - t^2}} \, \mathrm{d}t$ sur $]0; 1[$.

**Exercice 14**

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable à gauche et à droite en $a$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a)$.

**Exercice 15**

Déterminer le développement limité de $f$ en $x_0$ à l'ordre $n$ dans les cas suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a.* | $f(x) = 2\cos x + x \sin x$ | $x_0 = 0$ | $n = 3$ |
| *b.* | $f(x) = 2x^2 + x + 2$ | $x_0 = 2$ | $n = 100$ |
| *c.* | $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ | $x_0 = 0$ | $n = 4$ |

**Exercice 16**

En utilisant les D.L., déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1 + 2x}}{1 - \cos x}$.

**Exercice 17**

En utilisant les D.L., déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x \cos x - \sin x}$.

**Exercice 18**

Déterminer le D.L. de $\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ en 0 à l'ordre 3.

**Exercice 19**

Déterminer le D.L. de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ en 1 à l'ordre 2.

**Exercice 20**

Déterminer la valeur en 0 des quatres premières dérivées de $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x+x^2}$.

**Exercice 21**

Déterminer le D.L. en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+2x-2}$ de la forme $ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.