Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : UE 4

Td 1 **2ème semestre** **1999-2000**

Exercice 1

1. Soit $E = \{-2;-1;0;1;2\}$.
   L'addition usuelle, restreinte à E, définit-elle une loi de composition interne sur E?
2. Même question avec $E = 3\mathbb{Z}$.
3. Même question avec $F = \{-1;0;1\}$ et la multiplication usuelle.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $\blacklozenge$ par $a \blacklozenge b = a^2 + b^2$.
Etudier l'associativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre pour cette loi.

Exercice 3

Une loi $*$ est définie sur $A = \{0;1;2\}$ par le tableau suivant

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	0

1. La loi $*$ admet-elle un élément neutre?
2. Chaque élément admet-il un symétrique?

Exercice 4

$\mathbb{Q}_+^*$ est-il un groupe pour la loi $*$ définie par $a * b = \frac{a}{b}$?

Exercice 5

Soit $(G,*)$ est un groupe tel que, pour tout x de G, on ait $x * x = e$.
Montrer que $(G,*)$ est abélien.

Exercice 6

$E = \{-1;1\}$ est-il un sous groupe de $(\mathbb{Q}^*,\times)$?

Exercice 7

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$.
Montrer que $(U,\times)$ est un groupe.

Francis Wlazinski

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ muni de la loi $*$ définie par $a * b = a + b - ab$.

1. Monter que $(E,*)$ est un groupe abélien (càd un groupe commutatif).
2. Calculer $x * x * \ldots * x$ (n fois).

Exercice 9

Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e.
On note $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ x * y = y * x\}$.
Montrer que $Z(G)$ est un sous groupe de G.

Exercice 10

1. Montrer que, dans un monoïde, tout élément symétrisable est simplifiable.
2. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 11

Soient E un ensemble et A une partie propre de E c'est-à-dire $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.
Soit $\mathscr{F}_1$ l'ensemble des parties de E qui contiennent A.
Soit $\mathscr{F}_2$ l'ensemble des parties de E incluses dans A.

1. Montrer que $(\mathscr{F}_1,\cup)$ est un monoïde.
2. Montrer que $(\mathscr{F}_2,\cap)$ est un monoïde.
3. Quelle propriété, vraie pour les groupes, est fausse pour les monoïdes?

Exercice 12

Soit D^* l'ensemble des décimaux non nuls.
Pourquoi $(D^*,\times)$ n'est-il pas un groupe?
Quels sont les éléments inversibles de D^*?

Exercice 13

Soient $(G_1,*_1)$ et $(G_2,*_2)$ deux groupes.
Déterminer une loi sur l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ qui lui donne une structure de groupe.

Exercice 14

Une relation est dite compatible avec la loi d'un groupe $(G,*)$ ssi $a \mathscr{R} b$ et $c \mathscr{R} d \Rightarrow (a * c) \mathscr{R} (b * d)$.
Soit H un sous-groupe de $(G,*)$ groupe.
On définit la relation suivante $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a * b^{-1} \in H$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de l'élément neutre e.
3. Montrer que, si G est abélien, $\mathscr{R}$ est compatible avec la loi de G.
4. Cas particulier $(G,*) = (\mathbb{Z},+)$ et $H = 3\mathbb{Z}$.
   Expliciter les classes de 0, 1 et 2.
   Exprimer les opérations sur les classes $\bar{0}$, $\bar{1}$ et $\bar{2}$.