Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : UE 4

Td 2 **2ème semestre** **1999-2000**

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré du plan.
Soit T l'ensemble des isométries du plan qui laissent ce carré invariant.

1. Déterminer T.
2. Montrer que (T,o) est un groupe.
3. Donner la table d'opération de (T,o).
4. Déterminer les sous-groupes de (T,o) engendrés par chacun des éléments de T.

Exercice 2

Soit f un homomorphisme de monoïdes de $(E,*)$ sur $(F,\wedge)$.

1. Montrer que si $*$ est commutative alors $\wedge$ est commutative sur $f(E)$.
2. Montrer que si $*$ est associative alors $\wedge$ est associative sur $f(E)$.

Exercice 3

Soit $E =]0;+\infty[$ et $*$ la loi interne sur E définie par $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$.

1. Montrer que $\varphi : x \to \dfrac{1}{x}$ est un isomorphisme de $(E,+)$ sur $(E,*)$ où $+$ est l'addition usuelle.
2. En déduire que $*$ est associative sur E.

Exercice 4

Soit $(\mathbb{R},*)$ où $*$ est définie par $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.

1. Montrer que l'application $t \to \sqrt[3]{t}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ sur $(\mathbb{R},*)$.
2. Que peut-on en déduire pour $(\mathbb{R},*)$?

Exercice 5

Soit $(E,*)$ un magma.
Soit $u \in E$, soit t_u la translation à gauche de E associée à u.
t_u est l'application définie par

$$t_u : E \to E$$
$$x \to u * x$$

Soit $T = \{t_u \,/\, u \in E\}$.

1. Soit $\mathscr{S}(E) = \{\text{bijections de } E \text{ dans lui-même}\}$
   Rappeler les propriétés générales qui permettent de dire que $(\mathscr{S}(E),\text{o})$ est un groupe
   (o étant la loi de composition usuelle des fonctions).
2. Montrer que, si la loi $*$ est associative, alors $t_u \text{ o } t_v = t_{u * v}$.

Francis Wlazinski

3. On suppose que $(E,*)$ est un groupe.
   a. Montrer que : $\forall u \in E$, t_u est une bijection et expliciter sa réciproque.
   b. Montrer que (T,o) est un groupe.

Exercice 6

Soient $(G,*)$ un groupe noté multiplicativement et soit a un élément de G.
Soit φ_a l'application de G dans G définie par $\varphi_a(x) = a^{-1}*x*a$

1. Montrer que, pour tout a de G, φ_a est un automorphisme.
2. Déterminer φ_a lorsque $(G,*)$ est un groupe abélien.

Exercice 7

Soient $(G,*)$ un groupe noté multiplicativement.
Soit φ l'application de G dans G définie par $\varphi(x) = x^2$.
Montrer que φ est un endomorphisme si et seulement si G est abélien.

Exercice 8

Soient $(G,*)$ et $(G',\wedge)$ deux groupes d'éléments neutres respectif e et e'.
Soit $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes.
Montrer que f injective $\Leftrightarrow$ $\text{Ker}f = \{e\}$.

Exercice 9

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Montrer que U muni de la multiplication des nombres complexes est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*,\times)$.
2. Montrer que l'application f_a : $(\mathbb{R},+) \to (U,\times)$ où $a\in \mathbb{R}^*$.
   $\theta \to e^{ia\theta}$
   est un morphisme de groupe surjectif.
   Quel est le noyau de f_a?

Exercice 10

Soit $(G,+)$ un groupe abélien non réduit à $\{0_G\}$.
Soient $\text{End}(G)$ = {endomorphismes de G} et $\text{Aut}(G)$ = {automorphismes de G}.
Soient + l'addition usuelle des fonctions et o la composition usuelle des fonctions.
Soit $\varepsilon : G \to G$
$x \to 0_G$ où 0_G est l'élément neutre de G.

1. Montrer que $\varepsilon \in \text{End}(G)$ mais que $\varepsilon \notin \text{Aut}(G)$.
2. En déduire que $(\text{End}(G),\text{o})$ n'est pas un groupe.
3. Montrer que $(\text{Aut}(G),+)$ n'est pas un groupe.

Exercice 11

Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. On pose $B = \{x\in A \ / \ x^2 = x\}$.

1. Montrer que si $x\in B$ alors $1-x\in B$.
2. On définit la loi * sur B par $\forall x,y\in B$, $x * y = x + y - 2xy$
   Montrer que $(B,*,\times)$ est un anneau commutatif unifère.