



#### Exercice 1

Soit  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib ; \text{où } a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } i \text{ est le nombre complexe tel que } i^2 = -1\}$ .

Montrer que  $\mathbb{Z}[i]$  muni de l'addition et de la multiplication usuelles dans  $\mathbb{C}$  est un anneau commutatif unifié.

#### Exercice 2

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions affines numériques définies sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $+$  et  $\circ$  sont internes dans  $\mathcal{F}$ .
2.  $\mathcal{F}$  est-il un anneau lorsqu'il est muni de  $+$  et  $\circ$  ?

#### Exercice 3

Soit  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \text{ où } x, y \in \mathbb{Q}\}$ .

1. Montrer que  $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$  est un anneau.
2. Montrer que tout élément non nul de  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  est inversible.
3. a. Vérifier que, dans ce corps, l'équation  $x^2 - 2 = 0$  admet bien une solution dans  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ .  
b. Donner, suivant le même modèle, une autre écriture de  $\mathbb{C}$ .

#### Exercice 4

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $\mathbb{Q}[a] = \{P(a) \text{ où } P \in \mathbb{Q}[X]\}$ .

1. Que peut-on dire de  $\mathbb{Q}[a]$  si  $a$  est un nombre rationnel?
2. Quels sont les polynômes qui permettent de mettre en évidence l'inclusion :  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[a]$ ?
3. Montrer que  $\mathbb{Q}[a]$  muni des lois  $+$  et  $\times$  usuelles de  $\mathbb{R}$  est un anneau commutatif.

#### Exercice 5

Soit  $A = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  muni de l'addition et la multiplication usuelles des fonctions.

On supposera connu que  $A$  est un anneau.

1. Quels sont les éléments inversibles de  $A$ ?
2. Montrer que  $\mathcal{C}_1(\mathbb{R})$  est un sous anneau de  $A$ .
3. Soit l'application  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \rightarrow f(1)$$

Montrer que  $\varphi$  est un morphisme d'anneaux.

## Exercice 6

On rappelle que  $\mathbb{R}[X]$  muni de l'addition et de la multiplication usuelle des polynômes est un anneau commutatif unifié.

1. Quels sont les éléments inversibles de  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Soient  $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg P \leq 2\}$  et  $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / \exists Q \in \mathbb{R}[X] \ P(X) = (X-1)Q(X)\}$ .
  - a.  $E$  et  $F$  sont-ils des sous anneaux de  $\mathbb{R}[X]$ ?
  - b.  $E$  et  $F$  sont-ils des idéaux de  $\mathbb{R}[X]$ ?

## Exercice 7

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. Soient  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ .

Montrer que l'ensemble  $\{i + j / i \in I \text{ et } j \in J\}$  noté  $I + J$  est un idéal de  $A$ .

## Exercice 8

Soit  $K$  un corps. Montrer que les seuls idéaux de  $K$  sont  $\{0_K\}$  et  $K$ .

## Exercice 9

Une relation est dite compatible avec les lois d'un anneau  $(A, +, \times)$  si et seulement si :  $\forall a, b, c, d \in A$ ,  $a \mathcal{R} b$  et  $c \mathcal{R} d \Rightarrow (a + c) \mathcal{R} (b + d)$  et  $(a \times c) \mathcal{R} (b \times d)$ .

Soit  $I$  un idéal de  $(A, +, \times)$ . On définit la relation suivante :  $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b \in I$ .

1. Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de  $0_A$ .
3. Montrer que  $\mathcal{R}$  est compatible avec les lois de  $A$ .
4. Cas particulier  $(A, +, \times) = (\mathbb{Z}, +, \times)$  et  $I = 6\mathbb{Z}$ .  
Expliciter les classes de 0, 1, 2, 3, 4 et 5.  
Exprimer les opérations sur les classes  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$  et  $\bar{5}$ .
5. En déduire que  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  n'est pas un corps.

## Exercice 10

Soient  $E = \{A, B, C\}$  et  $S(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$ .

1. Enumérer  $S(E)$ .
2. Dans le plan euclidien, soit  $T$  un triangle équilatéral de sommets  $A, B$  et  $C$ .  
Enumérer l'ensemble  $I(T)$  des transformations du plan qui laissent le triangle  $T$  invariant.
3. Donner les correspondances entre les éléments de  $I(T)$  et ceux de  $S(E)$ ?
4. Donner les tables d'opération de  $(S(E), \circ)$  et de  $(I(T), \circ)$ .
5. Peut-on généraliser ce résultat à  $S_4$  et l'ensemble des transformations du plan qui laissent un carré invariant?

## Exercice 11

Soit  $\gamma = (a_1 a_2 a_3 \dots a_k)$  un cycle de longueur  $k \geq 3$ .

1. Déterminer  $\gamma^2$  et  $\gamma^3$ .
2. Déterminer  $\gamma^{-1}$  en fonction de  $\gamma$ .