Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : UE 4

Td 4 **2ème semestre** **1999-2000**

Exercice 1

1. Dans S_5, soit $\gamma = (1\ 4\ 3\ 2)$ et $\sigma = (1\ 5)\ (2\ 4\ 3)$. Déterminer $\sigma\gamma\sigma^{-1}$.
2. Soient n et k deux entiers tels que $n \geq k \geq 2$.
   Soit $\gamma = (a_1\ a_2\ \ldots.\ a_k)$ un cycle de longueur k et σ une permutation quelconque de S_n.
   Montrer que $\sigma\gamma\sigma^{-1}$ est aussi un cycle que l'on déterminera.

Exercice 2

Soient n et p deux entiers tels que $n \geq p \geq 2$.
Soit U le sous-ensemble de S_n composé de toutes les transpositions de la forme $(1\ \ p)$.

1. Soient $i,j \leq n$, écrire la transposition $(i\ j)$ comme un produit d'éléments de U.
2. Vérifier que, si $j \leq n$ et $3 \leq i \leq n$, on a $(1\ \ j)\ (1\ \ i) = (1\ j\ 2)\ (1\ 2\ i)\ (1\ 2\ j)$.

Exercice 3

Donner les signatures des éléments de S_3.

Exercice 4

Résoudre l'équation $3x^2 + xy - 11 = 0$ où $x,y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
si k est pair $k^2 \equiv 0\ [8]$ ou $k^2 \equiv 4\ [8]$
si k est impair $k^2 \equiv 1\ [8]$.

Exercice 6

Soit le système d'équation dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\begin{cases} \bar{5}x + \bar{4}y = \bar{5} \\ \bar{2}x + \bar{2}y = \bar{4} \end{cases}$.

1. Montrer que, si (x,y) est solution du système, alors $x = \bar{3}$ (on pourra faire la somme des équations).
2. En déduire <u>les</u> couples de solutions.

Exercice 7

1. Donner les tables d'opérations $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Francis Wlazinski

2. Soient $P = X^3 + \bar{2}X$ et $Q = X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{2}X^2 + X$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Calculer les valeurs de P et Q en $\bar{0}$, $\bar{1}$ et $\bar{2}$.

Exercice 8

Montrer que $2^n - 1$ est un multiple de 3 si et seulement si n est pair.

Exercice 9

Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ 3^{4k+3} \equiv 2[5]$.

Exercice 10

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On travaille dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Soit p une entier naturel premier avec n. Montrer que $\bar{p}$ est un élément simplifiable.

Exercice 11

Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, le pgcd de $n^2 - 5n + 4$ et n.

Exercice 12

Soit p un nombre premier. Montrer que, si n^2 est divisible par p, alors n est divisible par p.

Exercice 13

Soient a et b deux entiers naturels.
Montrer que a et b sont premiers entres eux si et seulement si $a + b$ et $a.b$ le sont.

Exercice 14

Soit $S = \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ 5p - 3q = 1\}$.

1. Montrer que $S \neq \varnothing$.
2. Parmi les éléments de S, justifier l'existence d'un couple unique (p_0,q_0) de solutions tel que p_0 soit positif et minimal (parmi les positifs) dans S.
3. Montrer que $\forall (p,q) \in S,\ 3 \mid p - p_0$ et $5 \mid q - q_0$.
4. En déduire une autre expression de S.

Exercice 15

On dit qu'un entier naturel est parfait si et seulement si il est égale à la somme de tous ses diviseurs (positifs) sauf lui-même.

1. a. Un nombre premier peut-il être parfait?
   b. Vérifier que 6 et 28 sont des nombres parfaits.
   c. Donner les diviseurs de 104.
2. Soit n un entier strictement positif.
   Montrer que si $2^{n+1} - 1$ est premier alors $2^n(2^{n+1} - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice 16

1. Déterminer le pgcd de 5236 et 495.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $5236x + 495y = 121$.