



#### Exercice 1

1. Résoudre dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .
2. En déduire les entiers relatifs tels que  $25p^2 + 39p + 8$  soit divisible par 6.

#### Exercice 2

1. Dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , à quelle condition a-t-on  $\bar{k} = \bar{0}$  et  $k$  premier?
2. Déterminer l'entier naturel  $p$  tel que  $p+2, p+6, p+8, p+12, p+18, p+24$  et  $p+42$  soient premiers.

#### Exercice 3

1. Déterminer le pgcd de 816 et 595.
2. En déduire les valeurs de  $m$  pour que l'équation  $816x + 595y = m$  (où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs) admettent des solutions.
3. Donner un couple de solutions à cette équation lorsque  $m = 34$ .

#### Exercice 4

Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 9$  divise  $10^n - 1$ .

#### Exercice 5 (Exemple du principe de Dirichlet)

Montrer que, si  $np + 1$  pigeons ( $n$  et  $p$  étant des entiers naturels) doivent nicher dans  $p$  cases, alors une case contient au moins  $n + 1$  pigeons.

#### Exercice 6

Soient  $a_1, a_1, \dots, a_n$   $n$  entiers naturels non nuls quelconques. Montrer qu'il existe, soit un des  $a_i$ , soit une somme des  $a_i$  (chaque terme étant pris au maximum une fois) qui est divisible par  $n$ .

#### Exercice 7

1. Factoriser  $P = X^5 - 5X^3 + 4X$ .
2. En déduire que, pour tout entier  $n$ ,  $n^5 - 5n^3 + 4n$  est divisible par 120.

### Exercice 8

1. Quels sont les diviseurs de 18? Justifier.
2. Quels sont les entiers naturels  $p$  inférieurs ou égaux à 18 tels que  $\text{pgcd}(p,18) = 1$ ? Justifier (on pourra étudier en premier les cas  $p$  multiple de 2 et  $p$  multiple de 3).
3. Quelle est la structure algébrique de  $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +, \times)$ ?
4. Quelles sont les unités de  $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +, \times)$ ?

### Exercice 9

Déterminer un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $\leq 4$  tel que  $P(X) - P(X - 1) = (X - 2)(X - 1)X$ .  
En déduire une simplification de  $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n - 2)(n - 1)n$ .

### Exercice 10

Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P = X^4 + 5X^2 + 4$ .

### Exercice 11

Décomposer dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $P = X^6 + 27$ .

### Exercice 12

Factoriser le polynôme  $P = X^7 - 6X^6 + 12X^5 - 8X^4 + X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ .

### Exercice 13

Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = 2X - 1$  et  $B = X - 2$ .
- b.  $A = X^3 + 2X^2 - X + 2$  et  $B = X^2 - 1$ .
- c.  $A = X^2 + X + 1$  et  $B = X^3 + 2X + 1$ .

### Exercice 14

Effectuer les divisions euclidiennes de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- a.  $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$  et  $B = X^2 - 3X + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- b.  $A = 4X^3 + X^2$  et  $B = X + 1 + i$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

### Exercice 15

Effectuer la division de  $A$  par  $B$  suivant les puissances croissantes à l'ordre  $n$  dans les cas suivants :

- a.  $A = X^3 + 2X + 1$  et  $B = 2X^2 + X + 1$  avec  $n = 3$
- b.  $A = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120}$  et  $B = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$  avec  $n = 4$