Université de Picardie Jules Verne

Antenne de Beauvais

Algèbre

Mias 1 : UE 4

Td 6 **2ème semestre** **1999-2000**

Exercice 1

On considère les deux polynômes $P = X^4 - X + p$ et $Q = X^2 - pX + 1$.
Déterminer le réel p positif pour que P soit divisible par Q.

Exercice 2

x_1, x_2 et x_3 étant les racines non nulles de $X^3 + aX^2 + bX + c = 0$.
Calculer $S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Exercice 3

Montrer que $X^{2n+1} + a^{2n+1}$ est divisible par $X + a$.

Exercice 4

On considère les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $A = X^{n+1} - X^n - X + 1$ et $B = (X-1)^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que A est divisible par B.

Exercice 5

Démontrer que le polynôme $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \ldots + \frac{X^n}{n!}$ ne possède pas de zéros (racines) multiples d'ordre ≥ 2.

Exercice 6

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 - 7X - 3$.
Déterminer les réels a, b et c tels que P admettent -1 comme racine multiple d'ordre 3.
En déduire une factorisation de P dans ce cas.

Exercice 7

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admette une racine double.
2. Factoriser $P = x^3 + px + q$ lorsque cette condition est vérifié.

Francis Wlazinski

Exercice 8

Trouver l'ordre de multiplicité de la racine 1 en fonction des valeurs de n du polynôme de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1 \quad \text{où } n > 1.$$

Exercice 9

Soit n un entier non nul.
Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P=aX^{n+1}+bX^n+1$ de $\mathbb{R}[X]$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 10

Déterminer les réels a,b et c pour que le polynôme $P=X^6-5X^4+aX^2+bX+c$ de $\mathbb{R}[X]$ admette une racine d'ordre 4 strictement négative et, dans ce cas, factoriser P.

Exercice 11

Soit $P = X^{100} - 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.

Exercice 12

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$.
1. Montrer que $Q_1 = \dfrac{Q + \overline{Q}}{2} \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $Q_2 = \dfrac{Q - \overline{Q}}{2i} \in \mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $Q = Q_1 + iQ_2$.

Exercice 13

Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que :
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 5$ et $P(0) = 29$.

Exercice 14

On considère les deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$: $A = X^{2n} + X^n + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Quelles conditions doit vérifier n pour que A soit divisible par B.

Exercice 15

Soit n un entier non nul.
Montrer que $A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ est divisible par $B = (X - 1)^2$.