



Exercice 1

1. Quels sont les fonctions polynomiales sur \mathbb{R} périodiques?
2. Soit n un entier non nul et soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n .
Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $A(X+1) - A(X) = Q$.
Quel est le degré de A ?
3. Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P = 3$, $P(X+1) - P(X) = X^2$ et $P(0) = 0$.
Déterminer P .
4. Expliciter et simplifier $S = \sum_{k=1}^m k^2$.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P et P' sont premiers entre eux alors P n'admet pas de racines multiples.

Exercice 3

Montrer que les racines du polynôme de $P = X^4 + X + 3 \in \mathbb{R}[X]$ sont simples.

Exercice 4

Soient $A = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$ et $B = X^5 - 8X^4 + 16X^3 - 3X^2 - 14X + 20$.
Résoudre $AU + BV = 2X^2 - 7X - 15$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = X - \frac{X^3}{3}C_n^1 + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1} X^{2n+1} \in \mathbb{R}[X]$.

1. Simplifier P' .
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
3. Ecrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles du polynôme $Q = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$.
4. Déterminer le PGCD de Q et de P' suivant les valeurs de n .

Exercice 6

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , le polynôme $P = (1 + X^4)^n - X^4$ est-il divisible par $1 + X + X^2$?

Exercice 7

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

On suppose que A et B sont premiers entre eux.

1. Combien vaut le pgcd de A et B ?
2. Que peut-on dire d'un polynôme R tel que $R \mid A$ et $R \mid B$?
3. Montrer que les polynômes $A + iB$ et $A - iB$ sont premiers entre eux .
(On pourra raisonner par l'absurde)
4. On suppose que le polynôme $A^2 + B^2$ admet une racine double x_0 .
 - a. Montrer que x_0 est une racine double de soit $A + iB$ soit $A - iB$.
 - b. En déduire que x_0 est une racine de $A'^2 + B'^2$.
où A' et B' désignent les polynômes dérivées de A et B respectivement.

Exercice 8

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{C}$

$$P \rightarrow P(i)$$

1. Montrer que φ est surjective.
2. Montrer que φ n'est pas injective.
3. Montrer que $\varphi(A) = \varphi(B) \Leftrightarrow X^2 + 1$ divise $A - B$.

Exercice 9

Soit P un polynôme unitaire de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ et un réel strictement positif α tels que $P^2 = X^2(X - 1)^2R + \alpha$.

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P' .
2. En déduire P' , α et P .
3. Décomposer R en facteurs irréductibles.

Exercice 10

1. Soit P un polynôme de degré 2 de $\mathbb{R}[X]$ tel que P' divise P . Montrer que $\exists c, x_0 \in \mathbb{R} / P = c(X - x_0)^2$.
2. Généraliser au cas où $\deg P = n \in \mathbb{N} (> 3)$.

Exercice 11

Soit A un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≤ 4 . Soit $c \in \mathbb{C}$.

On considère le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ définie par $B = (A' + A(c)(X - c)) - 2(A - A(c))$.

1.
 - a. Que peut-on dire de $\deg B$?
 - b. Montrer que c est racine de B .
2. Déterminer l'ordre de cette racine c de B selon les valeurs prises en c par les dérivées de A .

Exercice 12

Décomposer en éléments simples $R = \frac{X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 9X^2 - 3X + 6}{(X - 2)(X + 1)(X - 4)}$.