Attention : pour ce qui suit, je tappe au kilomètre. Si vous voyez des erreurs prévenez moi.

Exercice 3 :Chemin et circuit hamiltonien

En utilisant le fait que le problème du chemin hamiltonnien est NP-complet, prouvez que le problème du circuit hamiltonnien est lui aussi NP-Complet.

Exercice 3 : Eléments de solutions

Circuit hamiltonnien est un problème de NP

Dire que le problème du chemin hamiltonnien est NP-complet implique que le problème du chemin hamiltonnien est NP. Donc il existe un algorithme $VerifChHam$ de complexité polynômiale que l'on peut spécifier comme suit :
Algorithme $VerifChHam$
Données :
G = (X,E) : Un graphe ayant au moins un sommet ;
L : Une liste de sommets de G ;
Résultat : rep : un boléen ;
/* Spécification : Cet algorithme renvoie Vrai dans la variable rep si et seulement si L décrit un chemin hamiltonien du graphe G. C'est à dire que L est un chemin élémentaire de G passant par tous les sommets du graphe G*/

Dire que cet algorithme est polynômial signifie qu'il existe un polynôme $P(x)$ tel que quel que soit la donnée (G,L) de notre algorithme $VerifChHam$ le nombre d'opérations effectuées par $VerifChHam(G, L, rep)$ est majoré par $P(|G|)$.

Nous allons donc maintenant écrire un algorithme permettant de vérifier un circuit hamiltonnien.

Algorithme $VerifCircuitHam$
Données :
G = (X,E) : Un graphe ayant au moins un sommet ;
L : Une liste de sommets de G ;
Résultat : rep : un boléen ;
/* Spécifications :

L est une liste de sommets telle que le premier élément de la liste est égal au dernier, de plus, |L| $\geq$ 2. Cette spécification permet d'imposer la façon dont est décrit le circuit.

Cet algorithme renvoie Vrai dans la variable rep si et seulement si L décrit un circuit hamiltonien du graphe G. C'est à dire que L est un circuit élémentaire (seul le premier élément est répété deux fois) de G passant par tous les sommets du graphe G*/

Variables :

L' : une liste de sommets de G

x,y : sommets de G

b : boléen ;

DébutCode

$x \leftarrow Premier(L)$;

Si |L| $\leq$ |X|+ 1 alors

$L' \leftarrow Suite(L)$;

$y \leftarrow Premier(L')$;

$VerifChHam(G, L', b)$

$rep \leftarrow b \wedge ((x, y) \in E)$;

Sinon $rep \leftarrow Faux$

FinSi

FinCode

Tout d'abord il faut remarqué que si L décrit un chemin hamiltonien alors en retirant le premier élément de la liste (il est égal au dernier élément par spécification), on obtient un chemin hamiltonnien de plus si L décrit un chemin hamiltonien alors lepremier élément de la liste L est relié au second élémént de la liste L.

Donc Si L décrit un circuit hamiltonnien, alors rep sera vrai.

Réciproquement, supposons que rep soit vrai, alors L' est un chemin hamiltonnien et le premier élément de L est relié au second élément de L. Or par spécification, le premier élément de L est égal au dernier élément de L donc le dernier élément de L' est relier au premier élément de L', donc L est un circuit Hamiltonnien.

Complexité :

$x \leftarrow Premier(L)$; Coûte 1 opération

Le test s'effectue en au plus |X|+1 (< 2|G|) opérations

Partie Si : On a |L| $\leq$ |X|+ 1 $L' \leftarrow Suite(L)$; Coûte au plus |X| opérations (représentation par un tableau)

$y \leftarrow Premier(L')$; Coûte 1 opération

$VerifChHam(G, L', b)$ Coûte au plus $P(|G|)$ (P estun polynôme).

$rep \leftarrow b \wedge ((x, y) \in E)$;Coûte au plus |E| < |G| opérations

Chaque opération est polynômiale dans la taille de |G|. La complexité de notre algorithme est donc une somme finie de polynôme est donc un polynôme.

Transformation de chemin hamiltonnien vers circuit hamiltonnien

Idée : Soit G = (X,E) un graphe ayant un chemin hamiltonnien ChH. Soit y un sommet qui n'est pas présent dans X. On crée le graphe G'=(X',E') de la façon suivante :

1. X' = X ∪ {y} ;
2. E' = E ∪ {(u,v) ∈ X'^{2} | u ≠ v et (u = y ou v = y)}.

Propriétés de la transformation

Si ChH = $x_0, x_1, \ldots, x_k$ est un chemin hamiltonient de G alors c'est un chemin de G' puisque $E \subset E'$. De plus par construction, $(x_k, y) \in E'$ et $(y, x_0) \in E'$. Donc CiH' = $y, x_0, x_1, \ldots, x_k, y$ est un circuit hamiltonnien de G'.

Si ciH' =$t_0, t_1, \ldots, t_{k+1}, t_0$ est un circuit hamiltonien de G' alors il existe un indice q tel que $t_q = y$, posons :

$$\mu = t_{q+1}, t_{q+2}, \ldots, t_{k+1}, t_0, t_1, \ldots, t_{q-1}$$

On peut faire les remarques suivantes :

1. y n'est pas présent dans μ
2. μ est un chemin élémentaire de G'
3. μ est un chemin élémentaire de G (car chemin élémentaire de G' ne contenant pas y).
4. μ contient |X| sommet.

Donc μ est un chemin hamiltonien de G.

Il ne nous reste plus qu'à écrire formellement la transformation puis à calculer sa complexité/

Algorithme ChHam2CiHam
Donnée : G = (X,E) un graphe ;
Résultat : G' = (X',E') un graphe ;
Variable : y un sommet ;
/*Spécification : Voir ci-dessus*/
DébutCode
Chercher y un sommet qui n'est pas présent dans X ;
X' ← X ∪ {y} ;
E' ← E ;
Pour chaque sommet x de X faire
    Inserer (x,y) dans E' ;
    Inserer (y,x) dans E' ;

FinPour
FinCode
Complexité :
Chercher y un sommet qui n'est pas présent dans X ; Coûte au plus |X| opérations ($|X|^2$ si vous n'êtes pas doués)
X' $\leftarrow$ X $\cup$ {y} ; Coûte au plus |X|+1 opérations($< 2|G|$)
E' $\leftarrow$ E ; Coûte au plus |G| opérations
Inserer (x,y) dans E' ; Coûte 1 opération réalisée |X| fois
Inserer (y,x) dans E' ; Coûte 1 opération réalisée |X| fois
Coût de la boucle $< 2|G|$

le coût de notre algorithme est donc inférieur à $5|G|$ il est donc polynomial.

De plus, compte tenu des propriété de la transformation vues plus haut, nous povons affirmer que G possède un chemin hamiltonien si et seulement si G' possède un circuit hamiltonnien.

Le problème est donc NP-Complet.

Exercice 4 : Problème du voyageur de commerce

Nom : Voyageur de commerce
Données :
G = (X,E,V) Un graphe complet valué par des entiers
k : un entier
Question : Existe-t-il un chemin hamiltonnien de poids inférieur ou égal à k ?

Prouvez que le Problème du voyageur de commerce est un problème NP-Complet.

Exercice 4 : Eléments de solution

Voyageur de commerce est dans NP

Nous allons donc écrire un algorithme permettant de vérifier un solution. On prend une opération $ieme(i, L)$ qui renvoie le ième élément de la liste L. Cout : $O(i)$. Le premier élément de la liste a le numéro 1.
Algorithme VerifVC
Données :
G=(X,E,V) : Un graphe complet valué par des entiers
k : un entier ;
L : une liste de sommets ;
Résultat : rep : booléen ;
/*Spécification :

L est une liste de sommets telle que le premier élément de la liste est égal au dernier, de plus, |L| $\geq$ 2. Cette spécification permet d'imposer la façon dont est décrit le circuit.

Cet algorithme renvoie Vrai dans la variable rep si et seulement si L décrit un circuit hamiltonien du graphe G dont le poids est inférieur ou égal à k.*/
Variable :
G'=(X',E') un graphe ayant au moins un sommet ;
n,i un entier ;
x,y : sommets
b : booléen ;
DébutCode
$X' \leftarrow X$; $E' \leftarrow E$;
$VerifCircuitHam(G', L, b)$;
$i \leftarrow 2$; $n \leftarrow 0$;
Si b alors
$x \leftarrow ieme(1, L)$
Pour i variant de 2 à |L| faire
$y \leftarrow ieme(i, L)$; $i \leftarrow i + 1$;
$n \leftarrow n + V(x, y)$; $x \leftarrow y$;
FinPour
$y \leftarrow ieme(1, L)$; $n \leftarrow n + V(x, y)$;
$b \leftarrow (n \leq k)$
FinSi
$rep \leftarrow b$
Fincode
Dans la boucle n nous sert à calculer le poids du circuit. Nous avons auparavant vérifié que nous somme bien en présence d'un circuit hamiltonien par l'appel de VerifCircuitHam.

La complexité de VerifCircuitHam est polynômiale par rapport à la taille de G' or la taille de G' est inférieure ou égale à la taille de G. Donc, la complexité de VerifCircuitHam est polynômiale par rapport à la taille de G.

Complexité de la boucle : est majorée $2|L|^2 < 2|G|^2$

Les autres opérations coûte au plus |G|. La complexité de notre algorithme peut donc être majoré par une somme finie de polynôme. Elle est donc polynômiale.

Choix du problème NP-Complet

Nopus allons choisir CiruitHamiltonien de l'exercice précédent.

La Transformation

Idées : Il faut transformer un graphe quelconque en un graphe complet valué et un entier k. Soit G=(X,E) un graphe nous allons lui associé un graphe valué G'=(X',E',V') de la manière suivante :

1. X' = X
2. E' = X × X (ensemble de tous les couples d'éléments de X)
3. V' : Un matrice carrée indicée par X × X telle que V'(x,y) = 1 si $(x, y) \in E$ et V'(x,y) = 2 si $(x, y) \notin E$;

Il faut aussi un entier posons k = |X|

Remarques sur la transformations : Si $Ci = x_0, x_1, \ldots x_u, x_0$ est un circuit hamiltonien de G, c'est aussi un circuit hamiltonien de G' car $E \subset E'$. De plus puisque ce circuit n'utilise que des arêtes présentes dans G leur poids dans G' est 1. Ce circuit utilise |X| arêtes donc le poids de Ci dans G' est exactement |X|.

Réciproquement si $Ci' = x_0, x_1, \ldots x_u, x_0$ est un circuit hamiltonien de G' alors il contient |X| sommets distincts et passe par |X| arêtes. Donc chaque arête à un poids unitaire, donc chaque arête est présente dans G. Donc, $Ci' = x_0, x_1, \ldots x_u, x_0$ est un circuit hamiltonien de G.

Ecrivons l'algorithme :

Algorithme CiH2VC
Donnée : G = (X,E) Un graphe ;
Résultat : G' = (X',E',V') un graphe complet valué (V est une matrice d'entier) ;
/*Spécification : Voir ci-dessus*/
Variables : x,y : sommets
DébutCode
$X' \to X$; /*coût |X|≤|G|*/
$E' \to \emptyset$ /*coût au plus |X|^2 ≤|G|^2*/
$k \to |X|$; /*coût |X|≤|G|*/
Pour tout x dans X
    Pour tout y dans X
        Inserer (x,y) dans E' ; /* Coût 1, fait |X|^2 fois*/
        $V(x, y) \leftarrow 2$; /* Coût 1, fait |X|^2 fois*/
    Finpour
FinPour
Pour tout (x,y) dans E faire
    $V(x, y) \leftarrow 1$; /* Coût 1, fait |E| fois*/
FinPour
FinCode

On vérifie aisément que cette transformation coûte moins que $6|G|^2$, elle est donc polynômiale. De plus compte tenu des remarque faites auparavant, G contient un circuit hamiltonnien si et seulement si G' contient un circuit hamiltonnien de poids k = |X|.

Le problème est donc NP-Complet.