Version du 20 décembre 2007
Tous les calculs sont à vérifier...

Exercice 1 : Fonction génératrice

Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + xf(x) + 2x^2 f(x)$.
Calculez les termes de la suite récurrente associée.

Exercice 1 : Idées de résolution.

$f(x) = 1 + xf(x) + 2x^2 f(x)$
Exprimons $f(x)$ en fonction de x on obtient :
$f(x)(1 - x - 2x^2) = 1$. Donc

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

En cherchant les racines du polynôme $1 - x - 2x^2$ on obtient $x_1 = -1$ $x_2 = \frac{1}{2}$.
On cherchera donc deux valeurs α et β telles que

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x - \frac{1}{2}}$$

Par exemple en réduisant au même dénominateur puis en identifiant on obtient $\alpha = -\frac{2}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$, donc

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2} = \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{2}{3}}{x - \frac{1}{2}}$$

En multipliant par -2/-2 la seconde fraction :

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2} = \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{4}{3}}{1 - 2x}$$

Or

$$\frac{1}{x+1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$$

donc

$$\frac{-\frac{2}{3}}{x+1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{2}{3} x^n$$

d'autre part

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n$$

Donc

$$\frac{-\frac{4}{3}}{1-2x} = -\frac{4}{3}\sum_{n\geq 0} 2^n x^n = \sum_{n\geq 0} -\frac{2^{n+2}}{3} x^n$$

Donc

$$\frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{4}{3}}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1}\frac{2}{3} x^n + \sum_{n\geq 0} -\frac{2^{n+2}}{3} x^n$$

$$\frac{-\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{4}{3}}{1-2x} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} ((-1)^{n+1}2 - 2^{n+2}) x^n$$

Donc $u_{2k} = -\frac{2}{3} - \frac{2^{2k+2}}{3}$ et $u_{2k+1} = \frac{2}{3} - \frac{2^{2k+2}}{3}$

Exercice 2 : Décomposition en éléments simples

Décomposer la fraction

$$T(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

en éléments simples.

Exercice 2 : éléments de solution

On souhaite écrire $T(x)$ sous la forme suivante :

$$T(x) = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2} + \frac{\delta x + \mu}{x^2+x+1}$$

Déterminons α :

$$T_\alpha(x) = (x+2)T(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

et selon le cours,

$$\alpha = T_\alpha(-2) = \frac{-8+42-7}{(-2-1)^2(4-2+1)} = \frac{27}{27} = 1$$

Déterminons γ :

$$T_\gamma(x) = (x-1)^2 T(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x^2+x+1)}$$

et selon le cours,

$$\gamma = T_\gamma(1) = \frac{1 - 21 - 7}{(1+2)(1+1+1)} = -3$$

En passant par des valeurs particulières : On remarque ensuite que $T(0) = \frac{-7}{2}$, $T(-1) = \frac{13}{4}$, $T(2) = \frac{-41}{28}$ donc on en déduit trois équations :

$$T(0) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{-1} + \frac{-3}{(-1)^2} + \frac{\mu}{1} = \frac{-7}{2}$$

$$T(0) = \frac{-5}{2} - \beta + \mu = \frac{-7}{2}$$

$$-\beta + \mu = \frac{5}{2} + \frac{-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\mu = \beta - 1$$

$$T(-1) = \frac{1}{1} + \frac{\beta}{-1-1} + \frac{-3}{(-1-1)^2} + \frac{-\delta + \mu}{1} = \frac{13}{4}$$

$$T(-1) = 1 - \frac{\beta}{2} - \frac{3}{4} - \delta + \mu = \frac{13}{4}$$

$$\mu - \delta - \frac{\beta}{2} = \frac{13}{4} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{12}{4} = 3$$

$$\beta - 1 - \delta - \frac{\beta}{2} = 3$$

$$\frac{\beta}{2} - \delta = 4$$

$$\delta = \frac{\beta}{2} - 4$$

$$T(2) = \frac{1}{4} + \frac{\beta}{1} + \frac{-3}{(1)^2} + \frac{2\delta + \mu}{7} = -\frac{41}{28}$$

$$T(2) = \frac{1}{4} + \beta - 3 + \frac{2\delta + \mu}{7} = -\frac{41}{28}$$

$$T(2) = -\frac{11}{4} + \beta + \frac{2\frac{\beta}{2} - 8 + \beta - 1}{7} = \frac{41}{28}$$

$$T(2) = -\frac{11}{4} + \beta + \frac{2\beta - 9}{7} = \frac{41}{28}$$
$$T(2) = \frac{9}{7}\beta - \frac{77}{28} - \frac{36}{28} = \frac{41}{28}$$
$$T(2) = \frac{9}{7}\beta - \frac{113}{28} = \frac{41}{28}$$

$$\frac{9}{7}\beta = \frac{41}{28} + \frac{113}{28} = \frac{154}{28} = \frac{11}{2}$$
$$\beta = \frac{77}{18}$$

On en déduit les autres coefficients : $\delta = \frac{-67}{36}$ et $\mu = \frac{41}{36}$.

En passant par les racines complexes : On prend le polynôme $x^2 + x + 1$ et on calcule ses racines $\Delta = 1 - 4 = -3$ il n'y a donc pas de racines réelles mais il existe deux racines complexes $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ donc $x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ en concéquence nous allons réécrire $T(x)$:

$$T(x) = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2} + \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}$$

Avec :
$$\frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2} = \frac{\delta x + \mu}{x^2 + x + 1}$$

C'est à dire en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a(x - x_2)}{(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{b(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{\delta x + \mu}{x^2 + x + 1}$$

Dont on déduit $a + b = \delta$ et $\mu = -ax_2 - bx_1$

On détermine maintenant les deux coéficients a et b :

$$T_a(x) = (x - x_1)T(x) = \frac{x^3 - 21x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x - x_2)}$$

Et de la même façon que pour les réels, on a :

$$a = T_a(x_1)$$

Je ne me lance pas dans les calculs... On fait ensuite la même chose pour calculer b. Une fois les deux coeficients complexes déterminés on calcule δ et μ

Exercice 3 : Nombre de fibonacci

Soit $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite des nombre de Fibonacc définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Déterminez par la méthode des séries génératrices les nombres de Fibonacci F_n

Exercice 3 : Eléments de solutions

Posons :

$$F(x) = \sum_{i\geq 0} F_i x^i = F_0 + F_1 + \sum_{i\geq 2} F_i x^i$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + \sum_{i\geq 2}(F_{i-2} + F_{i-1})x^i$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + \sum_{i\geq 2} F_{i-2}x^i + \sum_{i\geq 2} F_{i-1}x^i$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + x^2 \sum_{i\geq 2} F_{i-2}x^{i-2} + x \sum_{i\geq 2} F_{i-1}x^{i-1}$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + x^2 \sum_{i\geq 0} F_i x^i + x \sum_{i\geq 1} F_i x^i$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + x^2 F(x) + x(\sum_{i\geq 0} F_i x^i) - xF_0$$

$$F(x) = F_0 + F_1 + x^2 F(x) + xF(x) - xF_0$$

$$(1 - x^2 - x)F(x) = F_0 + F_1 - xF_0$$

$$F(x) = \frac{F_0 + F_1 - xF_0}{1 - x^2 - x}$$

Soit dans le cas qui nous concerne :

$$F(x) = \frac{1}{1 - x^2 - x} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Car $1 - x^2 - x$ est un polynôme ayant deux racines réelles : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

On veut écrire $F(x)$ sous la forme d'une somme de fraction simple :

$$F(x) = \frac{a}{x - x_1} + \frac{b}{x - x_2}$$

$$T_a(x) = (x - x_1)F(x) = \frac{1}{x - x_2}$$

$$a = T_a(x_1)\frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$T_b(x) = (x - x_2)F(x) = \frac{1}{x - x_1}$$

$$b = T_b(x_2) = \frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Donc

$$F(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{(x - x_1)} - \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{(x - x_2)}$$

$$F(x) = -\frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{(x_1 - x)} + \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{(x_2 - x)}$$

$$F(x) = -\frac{\sqrt{5}}{5x_1}\frac{1}{(1 - \frac{x}{x_1})} + \frac{\sqrt{5}}{5x_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}}$$

Or $\frac{1}{x_1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$
$\frac{1}{x_1} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -x_2$ De même : $\frac{1}{x_2} = -x^1$.

$$F(x) = \frac{\sqrt{5}x_2}{5}\frac{1}{1 - (-x_2)x} - \frac{\sqrt{5}x_1}{5}\frac{1}{1 - (-x_1)x}$$

Or

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n x^n$$

Donc

$$F_n = \frac{\sqrt{5}x_2}{5}(-x_2)^n - \frac{\sqrt{5}x_1}{5}(-x_1)^n$$