

Initiation à la Robotique

ME 5.1a

Licence Professionnelle Automatismes et Robotique

Session 2023 - Amiens

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
Université de Picardie Jules Verne

E-mail : fabio.morbidi@u-picardie.fr



Electronique

Energie Electrique

Automatique

UNIVERSITÉ
de Picardie

Jules Verne




P

PROMEO

PROMEO
pôle
formation des
industries technologiques
CRÉATEUR DE COMPÉTENCES

PICARDIE

Organisation du cours

n°	Date	matin/a.m.	CM	TD	Contrôle	Lieu
1	Ven. 7 oct. 2022	a.m.	CM1			Promeo, Salle A13
2	Ven. 21 oct. 2022	a.m.	CM2	TD1		Promeo, Salle A117
3	Mer. 16 nov. 2022	a.m.	CM3	TD2		Promeo, Salle A117
4	Ven. 18 nov. 2022	matin	CM4	TD3		Promeo, Salle A117
5	Mer. 14 déc. 2022	a.m.			DS	Promeo
6	Ven. 16 déc. 2022	matin			TP1	Dpt. EEA 
7	Ven. 13 jan. 2023	matin			TP2	Dpt. EEA 
8	Mer. 1 fév. 2023	matin			TP3	Dpt. EEA 

Matin: 8h30-12h15, pause 10h20-10h35 – **Après-midi:** 13h15-17h00, pause 15h10-15h25

Chargé de TD et TP: Daniel Rodrigues da Costa (laboratoire MIS, UPJV)

$$\text{Note finale} = \text{l'arrondi de } \frac{1}{2} \left[\text{DS} + \left(\frac{\text{TP1} + \text{TP2} + \text{TP3}}{3} \right) \right]$$

Plan du cours

- Introduction
- Constituants et caractéristiques d'un robot
- Gammes de robots et secteurs d'activités
- Les baies de commandes, le boîtier d'apprentissage, les modes et la programmation d'un robot
- Actionneurs et capteurs d'un robot
- Repères et transformations homogènes
- Étude de cas: cellule robotisée de soudage



Notation

$$a, \gamma, M \in \mathbb{R}$$

scalaires

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

vecteur *colonne* de dimension n , $\mathbf{x} =$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice avec n lignes et m colonnes

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

matrice identité $n \times n$

$$\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice de zéros $n \times m$

$$\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

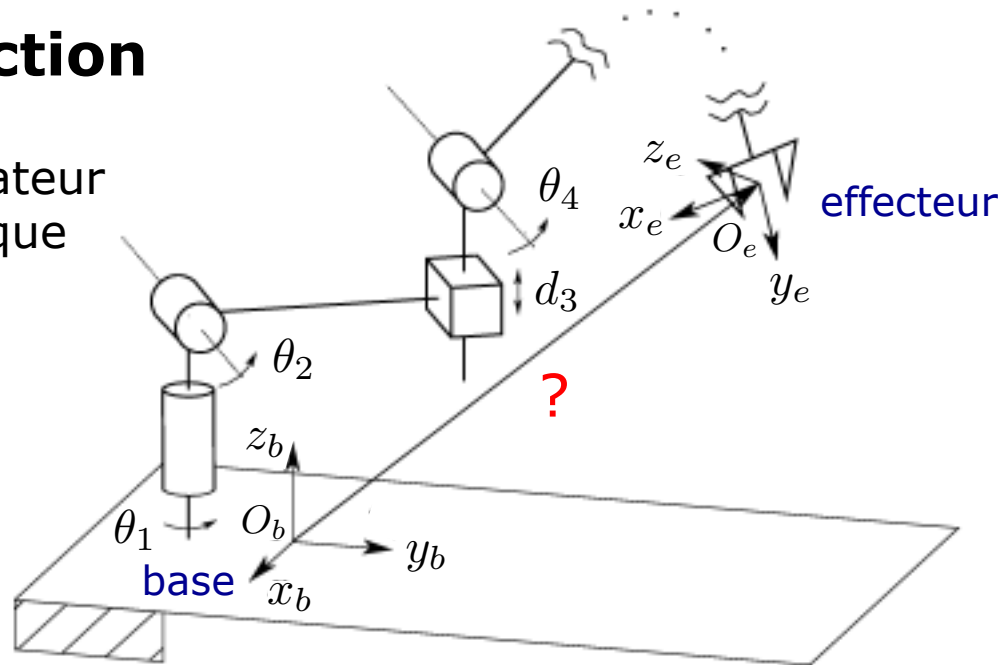
transposée de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

inverse de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (de rang plein)

Introduction

Manipulateur
générique



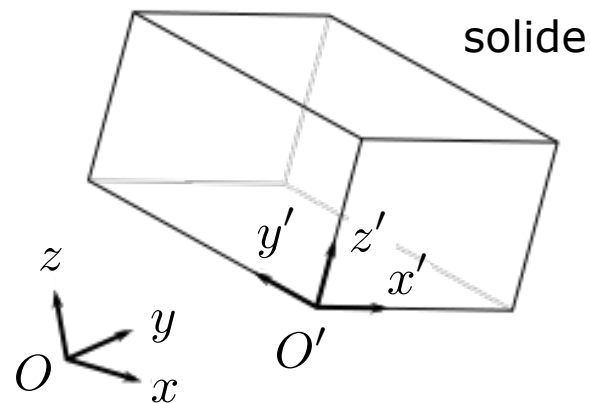
- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

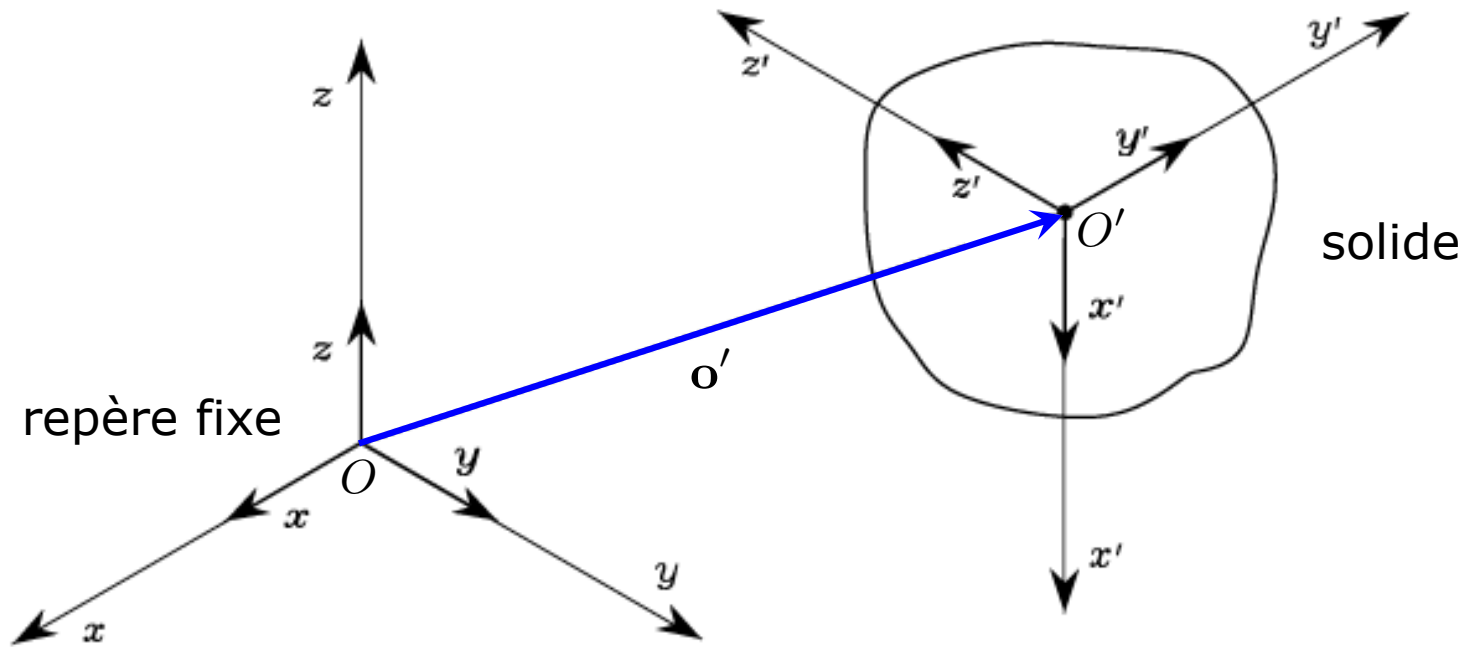
Objectif final: exprimer la pose de l'effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (par ex. le repère de la base)

Positionnement

La **pose** d'un *solide* (ou corps rigide) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par **6 paramètres indépendants**:

- **3** paramètres indépendants définissent la **position** d'un point, noté O' , du solide dans le repère fixe $O-xyz$ (par ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)
- **3** paramètres indépendants déterminent l'**orientation** du solide autour du point O' (par ex. les angles d'Euler)





La **position** du point O' du solide par rapport au repère fixe O - xyz s'exprime par l'équation:

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z}$$

où \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} sont les vecteurs unitaires (la norme est 1) des axes du repère O - xyz et o'_x , o'_y , o'_z sont les composantes du vecteur $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$ le long de chacun des trois axes

- Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère *attaché au corps* et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère $O-xyz$
- Soit $O'-x'y'z'$ un tel repère avec origine O' et soient \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' les vecteurs unitaires des axes
- Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère $O-xyz$ par les équations:

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$

- Sous forme compacte, les vecteurs unitaires \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' qui décrivent l'orientation du solide par rapport à $O-xyz$, peuvent être combinés dans la matrice 3×3 :

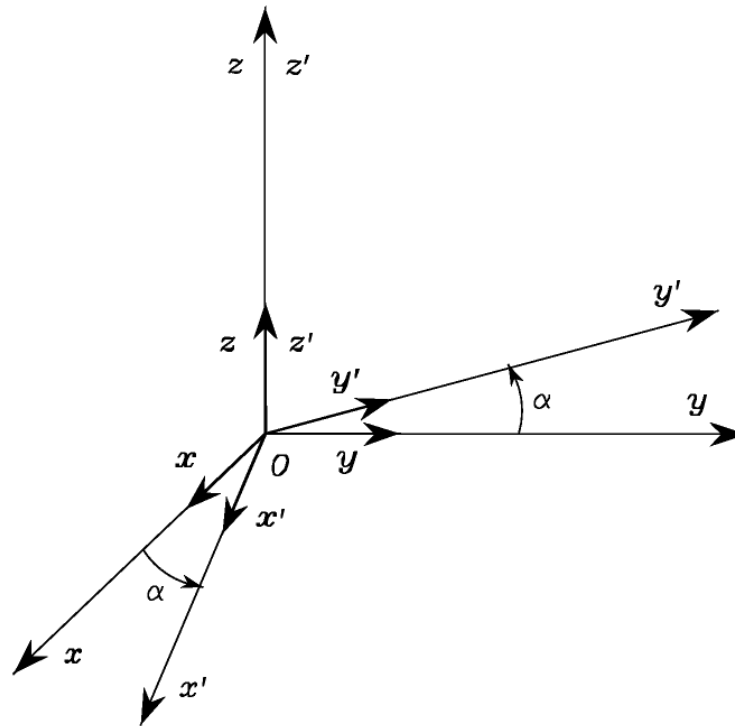
$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**

Rotations élémentaires

- Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes x, y, z
 - Ces rotations sont **positives** s'ils sont faites autour des axes relatifs dans le *sens antihoraire*

Exemple: le repère $O-xyz$ est pivoté d'un angle α autour de l'axe z et $O-x'y'z'$ est le repère qui résulte de cette rotation



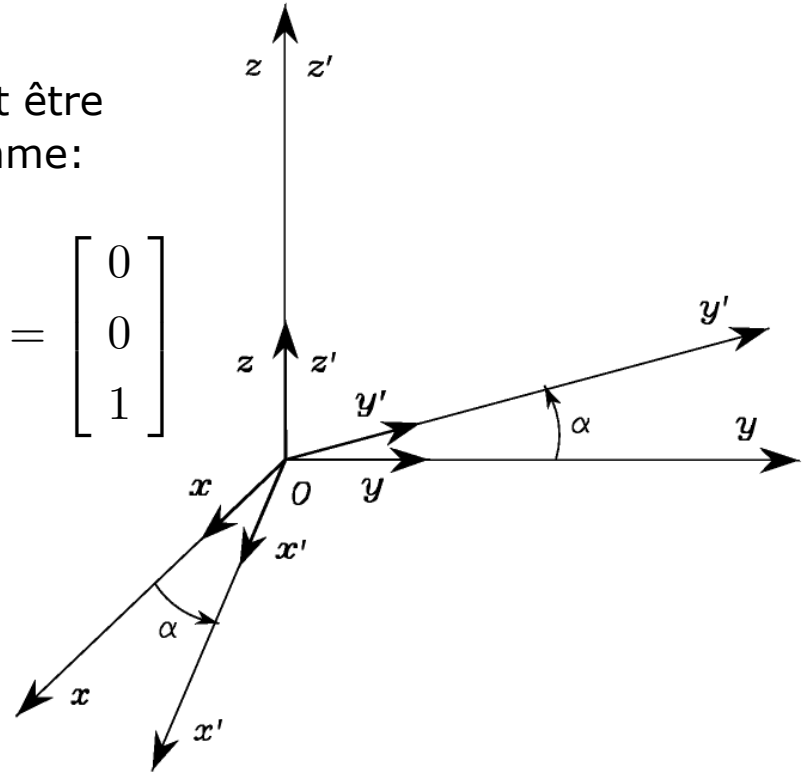
Rotations élémentaires

- Les vecteurs unitaires de $O-x'y'z'$ peuvent être exprimés par rapport au repère $O-xyz$ comme:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice de rotation de $O-x'y'z'$ par rapport à $O-xyz$ engendrée est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β et la matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

Remarque: ces matrices sont très utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'axes *arbitraires*

Rotations élémentaires: sommaire

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe z d'un angle α

Remarque:

Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

Représentation d'un vecteur

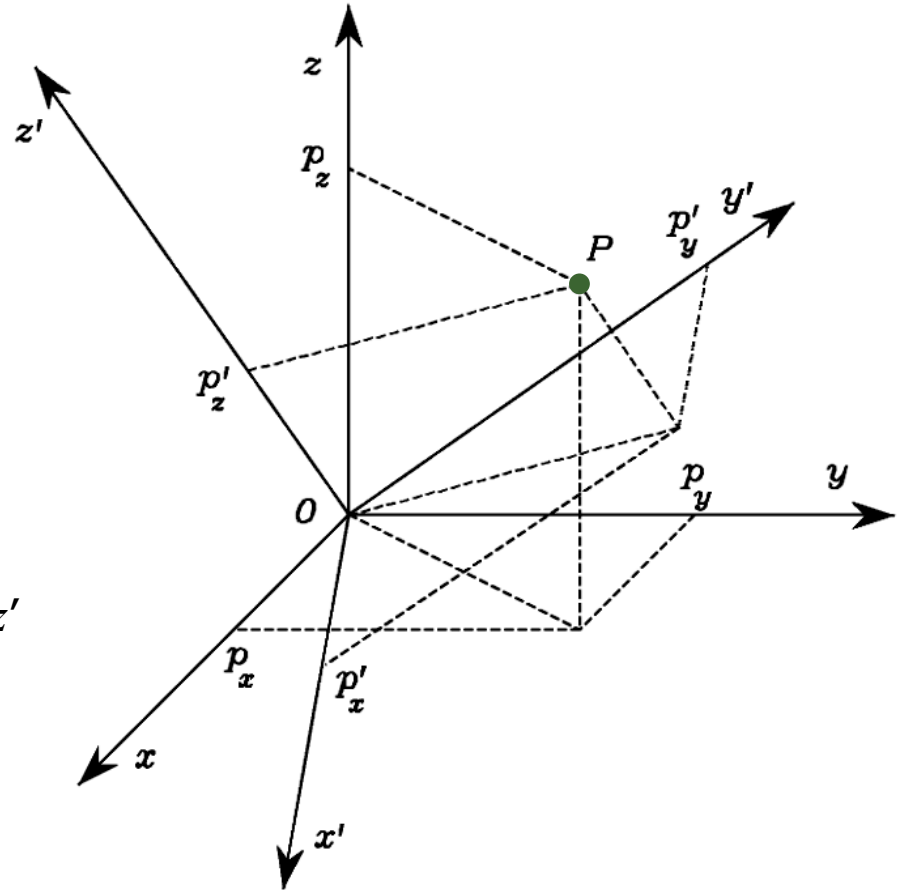
Hypothèse simplificatrice: l'origine du repère du solide coïncide avec l'origine du repère fixe. Donc $\mathbf{o}' = \mathbf{0}_{3 \times 1} = [0, 0, 0]^T$

On peut représenter le point 3D P comme suit:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \text{par rapport à } O\text{-}xyz$$

et

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \quad \text{par rapport à } O\text{-}x'y'z'$$



Représentation d'un vecteur

Mais \mathbf{p} et \mathbf{p}' sont deux représentations du même point P , donc:

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

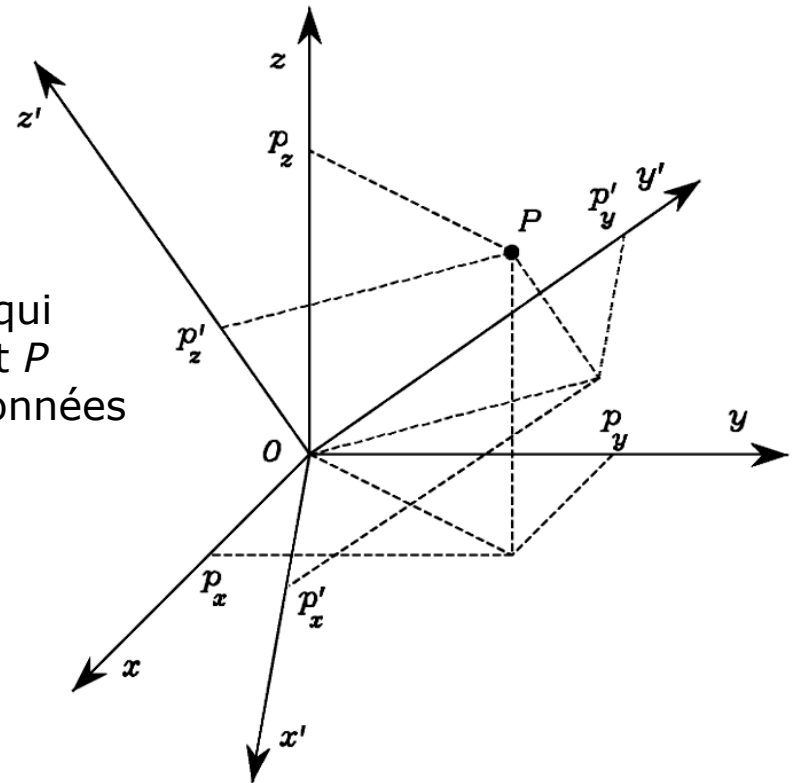
Mais cela signifie que (cf. les équations précédentes):

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

\mathbf{R} représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point P dans le repère $O-xyz$, en fonction des coordonnées du même point dans le repère $O-x'y'z'$

\mathbf{R} est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$



Représentation d'un vecteur

Exemple:

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle α autour de l'axe z

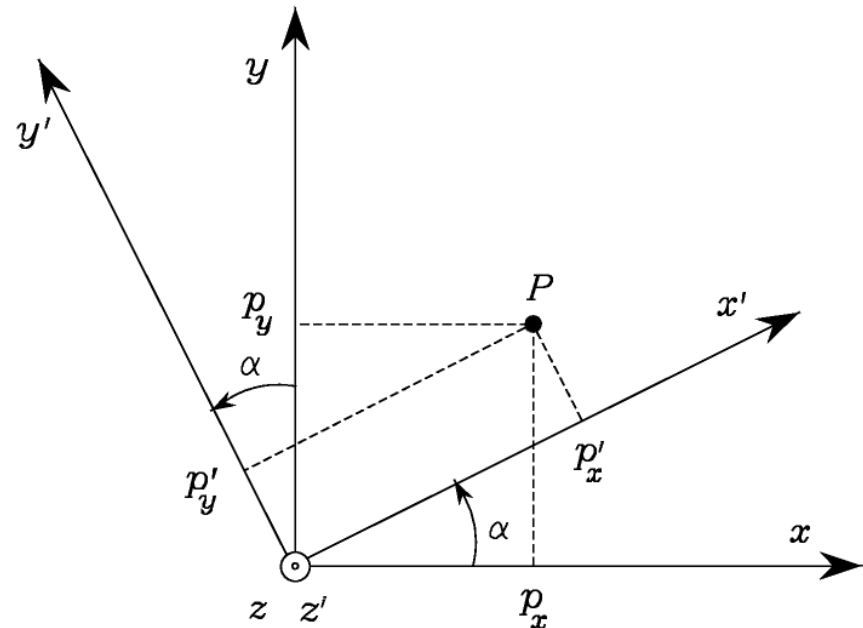
\mathbf{p} , \mathbf{p}' : vecteurs des coordonnées du point P dans les repères $O-xyz$ et $O-x'y'z'$

On trouve que:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$



Remarque:

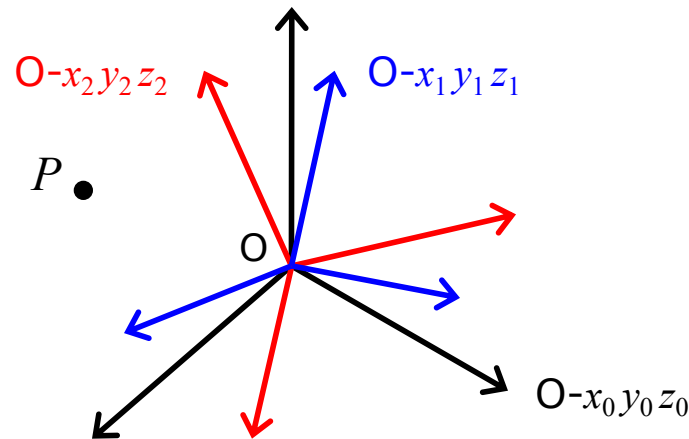
La matrice $\mathbf{R}_z(\alpha)$ représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre* avec la même origine

Composition de matrices de rotation

Problème: Comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères** $O-x_0y_0z_0$, $O-x_1y_1z_1$, $O-x_2y_2z_2$ avec la *même origine* O

$\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$ coordonnées d'un point P dans les trois repères



Composition de matrices de rotation

Soit \mathbf{R}_i^j la matrice de rotation du repère i par rapport au repère j

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De la même façon, on obtient

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec $O-x_0y_0z_0$

La rotation définie par \mathbf{R}_2^0 peut être interprétée comme obtenue en *deux étapes*:

1. Tourne le repère avec \mathbf{R}_1^0 pour l'aligner avec $O-x_1y_1z_1$
2. Tourne le repère, maintenant aligné avec $O-x_1y_1z_1$, en utilisant \mathbf{R}_2^1 pour l'aligner avec $O-x_2y_2z_2$

Remarque:

- La rotation d'ensemble peut être exprimée comme une séquence de *rotations partielles*
- Chaque rotation est définie par rapport à la *précédente*
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations
- Avec notre notation, on a que:

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

Composition de matrices de rotation

Remarque:

- Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées toujours par rapport au *repère initial*
 - On dit donc que les rotations sont faites par rapport au **repère fixe**
 - La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des matrices de rotation
-

Problème de base: le produit matriciel n'est pas *commutatif* !

- Deux rotations, en général, ne commutent pas et la composition dépend de l'ordre des rotations individuelles:

$$\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

Composition de matrices de rotation

Exemple:

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\pi/6) \mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

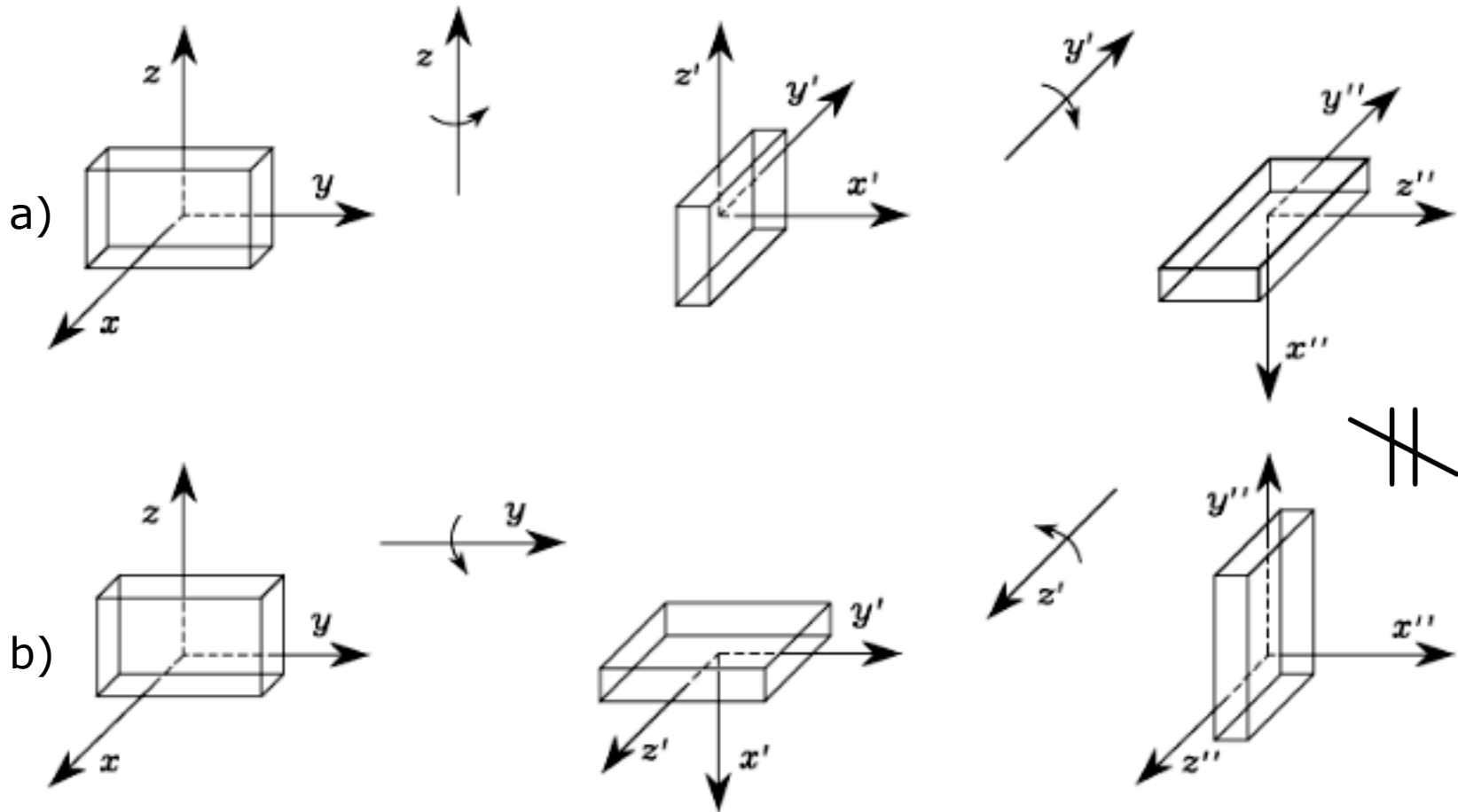
mais

~~||~~

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

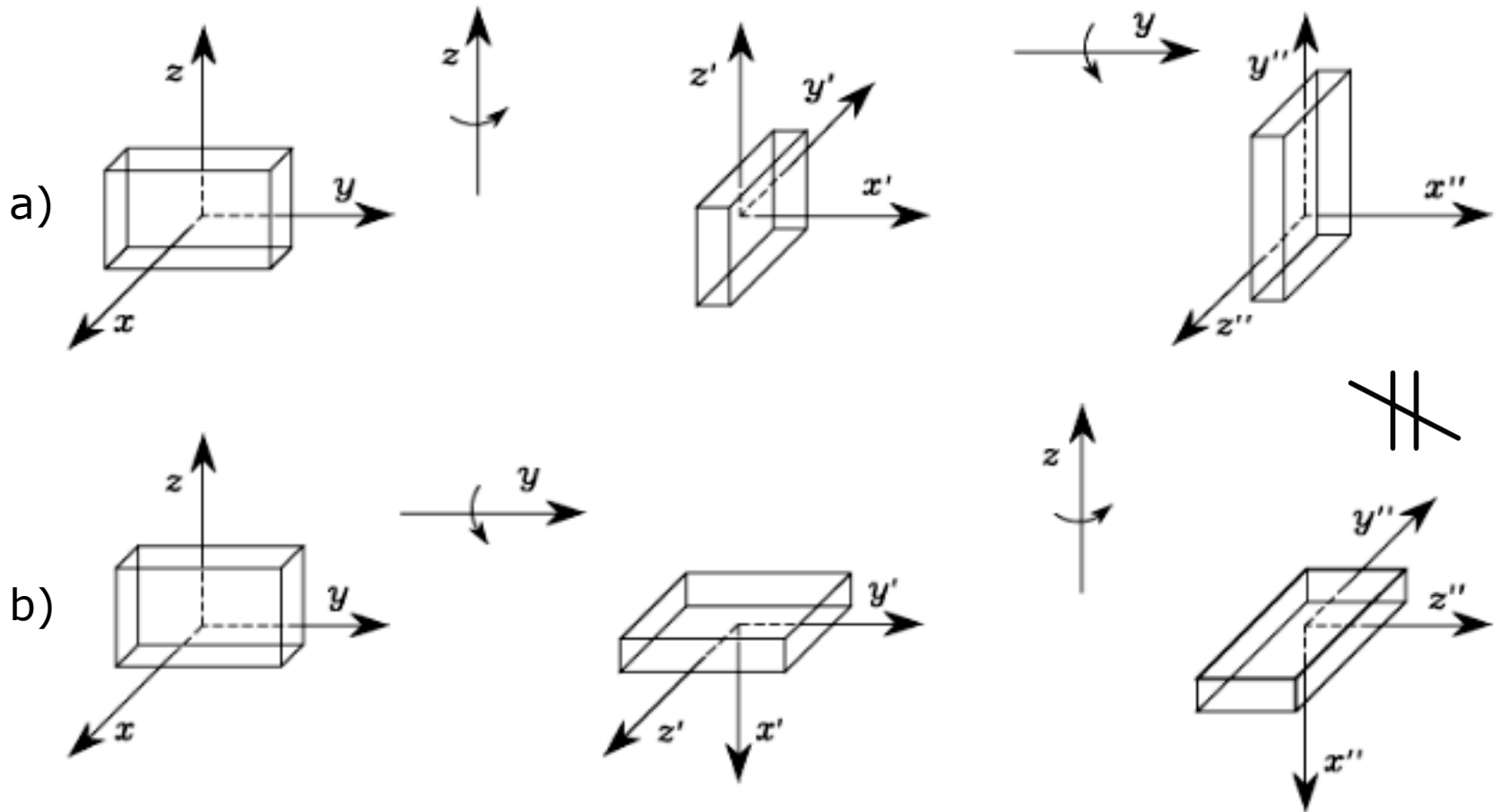
Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**



Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**



Représentation de l'orientation

- Les matrices de rotation fournissent une **description redondante** de l'orientation d'un corps
- En effet, la matrice de rotation \mathbf{R} comprend 9 éléments:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Mais il y a **6 relations indépendantes** entre ces éléments (*contraintes d'orthogonalité et de normalité des colonnes*)

$$\begin{array}{ll} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} = 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \end{array}$$

Conclusion: **3 paramètres** sont suffisantes pour décrire l'orientation d'un corps

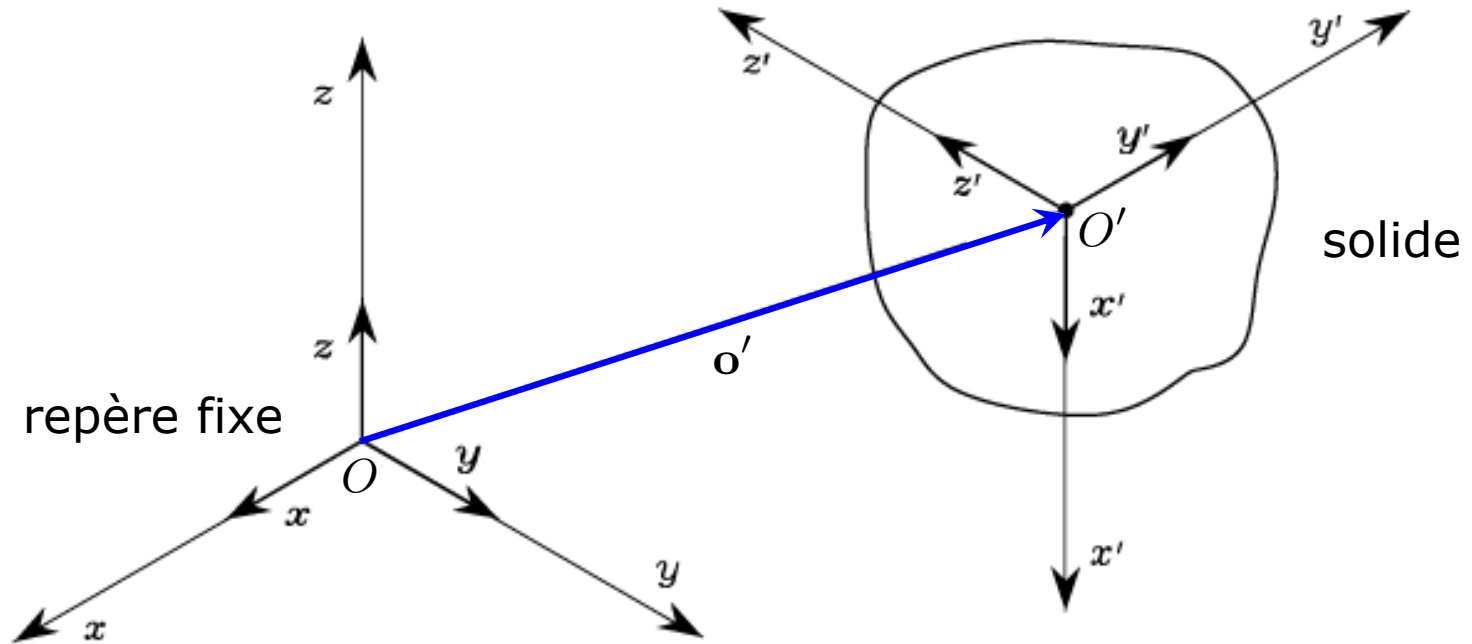
Une représentation de l'orientation en fonction de *3 paramètres indépendants* est dite **représentation minimale** (par ex. les trois angles d'Euler)

Représentation de l'orientation

Propriétés des 4 représentations de l'orientation d'un corps rigide

Représentation	Matrice de rotation	Angles d'Euler (ZYZ, ZYX, etc.)	Angle et axe	Quaternion unitaire
Globale	Oui	Non	Non	Oui
Unique	Oui	Non	Non	Non
Minimale	Non	Oui	Non	Non

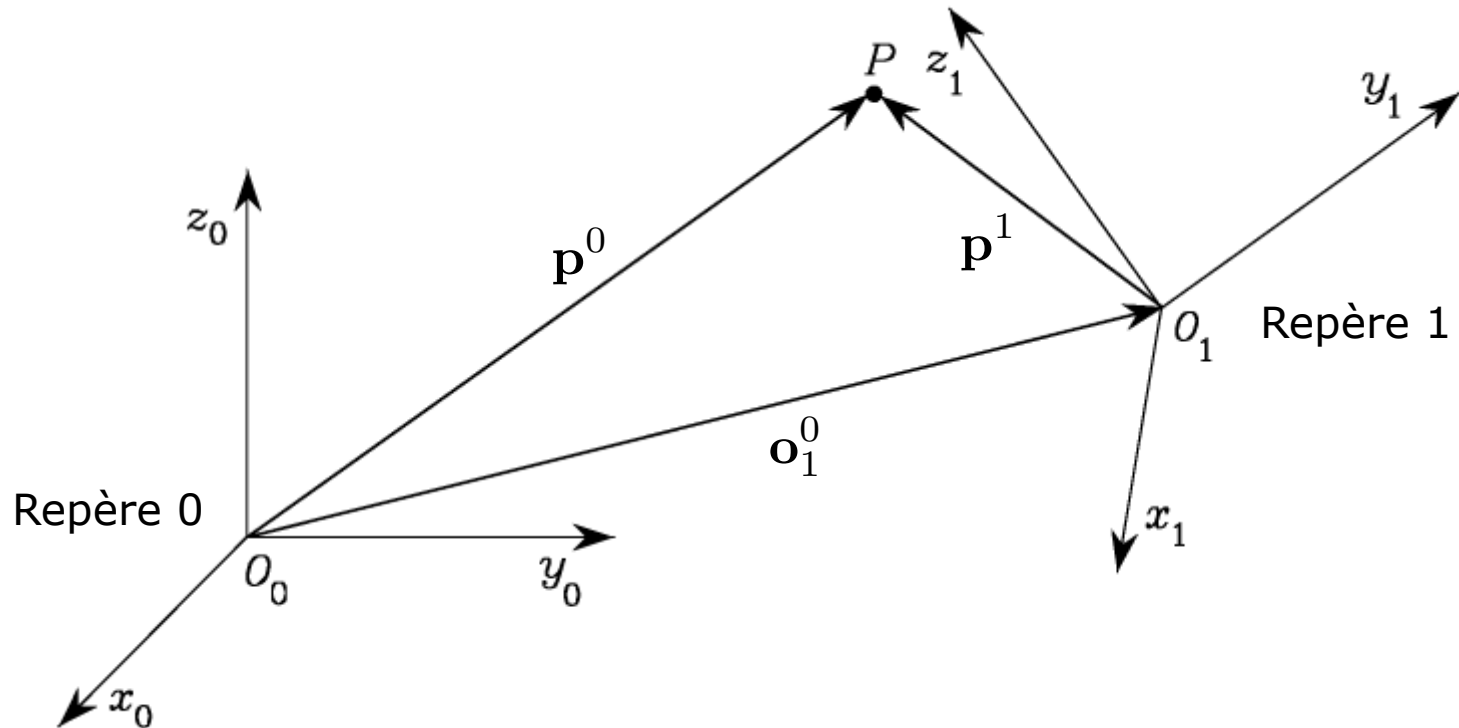
Matrices homogènes



Pour décrire la **pose** d'un solide dans l'espace 3D, on a besoin de connaître:

- [*Translation*] Position d'un point sur le solide (O') par rapport au repère fixe
- [*Rotation*] Composants des vecteurs unitaires du repère attaché au corps avec origine O' , par rapport au repère fixe

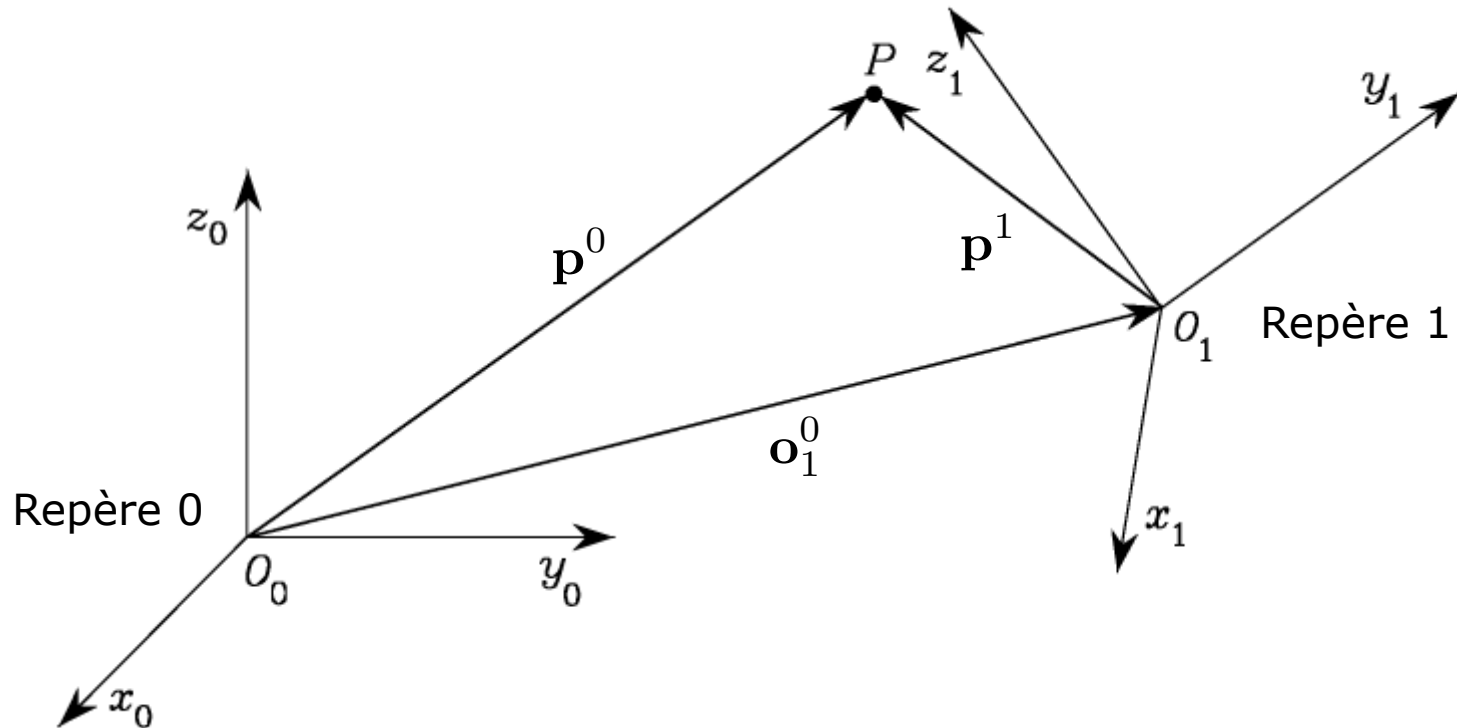
Matrices homogènes



Soit:

- P : point générique dans l'espace 3D
- $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1$: coordonnées du point P par rapport au repère 0 et 1
- \mathbf{o}_1^0 : vecteur qui décrit l'origine du repère 1 par rapport au repère 0
- \mathbf{R}_1^0 : matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0

Matrices homogènes

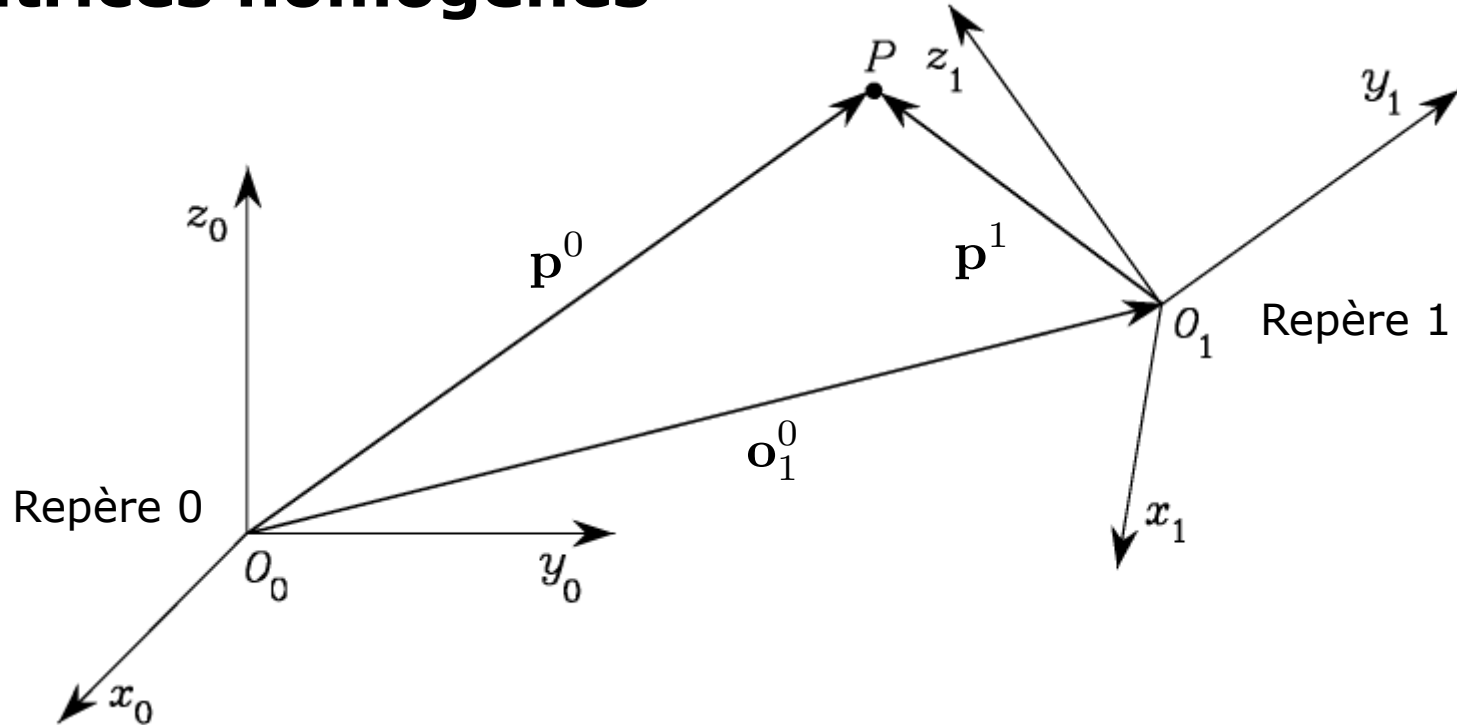


- On peut écrire la position du point P par rapport au repère 0 comme suit:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

Transformation de coordonnées
(translation + rotation) d'un vecteur
entre le repère 0 et le repère 1

Matrices homogènes



- Pour avoir une *représentation compacte* de la relation entre les coordonnées du même point P dans les deux repères, nous pouvons introduire la **représentation homogène** d'un vecteur générique $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{p} \text{ "tilde"} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{On rajoute une 4e coordonnée au vecteur, dont la valeur est } 1$$

Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs \mathbf{p}^0 et \mathbf{p}^1 , on peut écrire la transformation de coordonnées en utilisant *une seule matrice* 4×4 :

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Matrice\ de} \\ \mathbf{transformation} \\ \mathbf{homogène} \end{array}$$

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple:

$$(\mathbf{o}_1^0, \mathbf{R}_1^0)$$

- La pose est définie par 6 *paramètres*:
 - 3 définissant la *translation*
 - 3 définissant la *rotation*

Matrices homogènes

- La transformation d'un vecteur du repère 1 au repère 0 est exprimée par une seule matrice qui contient la matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0 et le vecteur de translation de l'origine du repère 0 à l'origine du repère 1:

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

- La **transformation inverse** entre le repère 0 et 1 est décrite par la matrice \mathbf{A}_0^1 qui satisfait l'équation:

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0$$

- En utilisant les propriétés des matrices partitionnées, on trouve que:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices homogènes

Attention: les matrices homogènes ne satisfont pas la *propriété d'orthogonalité*. Par conséquent, en général:

$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$$

En conclusion:

- Une matrice homogène permet d'exprimer la transformation de coordonnées entre deux repères *sous forme compacte*
- Si les repères ont la *même origine* la matrice homogène se réduit à la *matrice de rotation* (4×4) définie précédemment
- Comme pour les matrices de rotation, on peut *composer* une séquence de transformations de coordonnées grâce au produit matriciel:

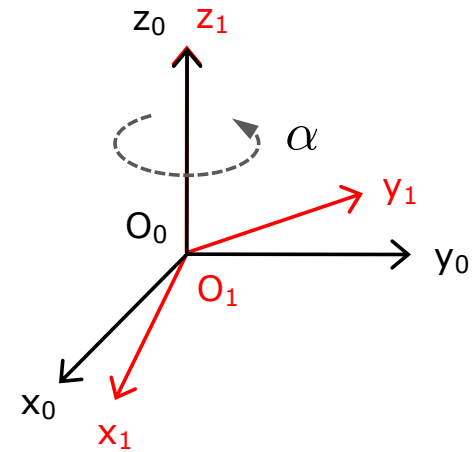
$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \cdots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

où \mathbf{A}_i^{i-1} est la matrice de transformation qui met en relation la description d'un point dans le repère i avec la description du même point dans le repère $i - 1$

Matrices homogènes

Exemple 1 (Rotation simple autour de l'axe z)

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple 2 (Translation simple)

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

