Initiation à la Robotique

ME 5.1a

Licence Professionnelle Automatisme et Robotique

Session 2024 - Amiens

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS
Équipe Perception Robotique
Université de Picardie Jules Verne

E-mail : fabio.morbidi@u-picardie.fr

Organisation du cours

n°	Date	matin/a.m.	CM	TD	Contrôle	Lieu
1	Ven. 13 oct. 2023	a.m.	CM1			Promeo, salle A118
2	Mer. 25 oct. 2023	a.m.	CM2	TD1		Promeo, salle A118
3	Jeu. 9 nov. 2023	matin	CM3	TD2		Promeo, salle A118
4	Mer. 6 déc. 2023	matin	CM4	TD3		Promeo, salle A115
5	Jeu. 7 déc. 2023	a.m.			**DS**	Promeo, salle A115
6	Ven. 5 jan. 2024	matin			**TP1**	Dpt. EEA
7	Ven. 5 jan. 2024	a.m.			**TP2**	Dpt. EEA
8	Ven. 2 fév. 2024	a.m.			**TP3**	Dpt. EEA

Matin: 8h30-12h15, pause 10h20-10h35 – **Après-midi**: 13h15-17h00, pause 15h10-15h25

Chargé de TD : Daniel Rodrigues da Costa (laboratoire MIS, UPJV)

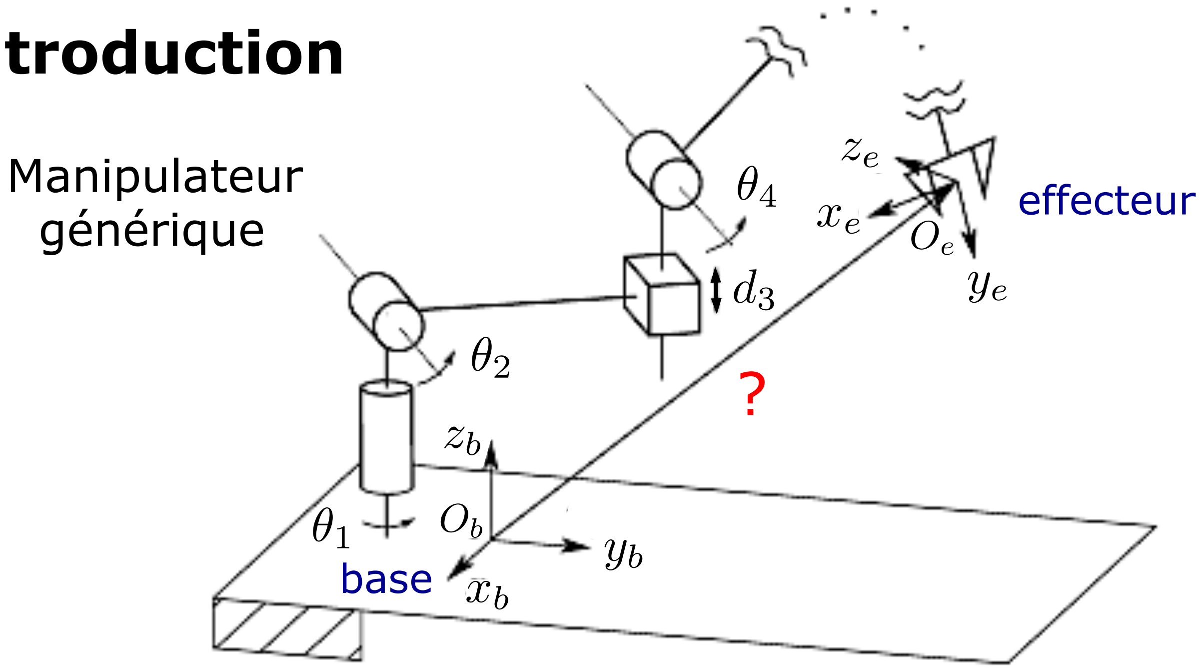
Plan du cours

- Introduction
- Constituants et caractéristiques d’un robot
- Gammes de robots et secteurs d’activités
- Les baies de commandes, le boîtier d’apprentissage, les modes et la programmation d’un robot
- Actionneurs et capteurs d’un robot
- Repères et transformations homogènes
- Étude de cas: cellule robotisée de soudage

Notation

$a,\ \gamma,\ M \in \mathbb{R}$	scalaires
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	vecteur *colonne* de dimension n, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$	matrice avec n lignes et m colonnes
$\lVert\mathbf{x}\rVert \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	norme euclidienne du vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$	matrice identité $n \times n$
$\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$	matrice de zéros $n \times m$
$\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$	transposée de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (de rang plein)

Introduction



- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

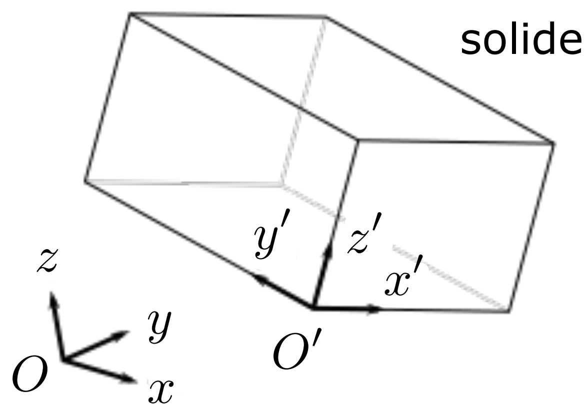
Objectif final : exprimer la pose de l’effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (par ex. le repère de la base)

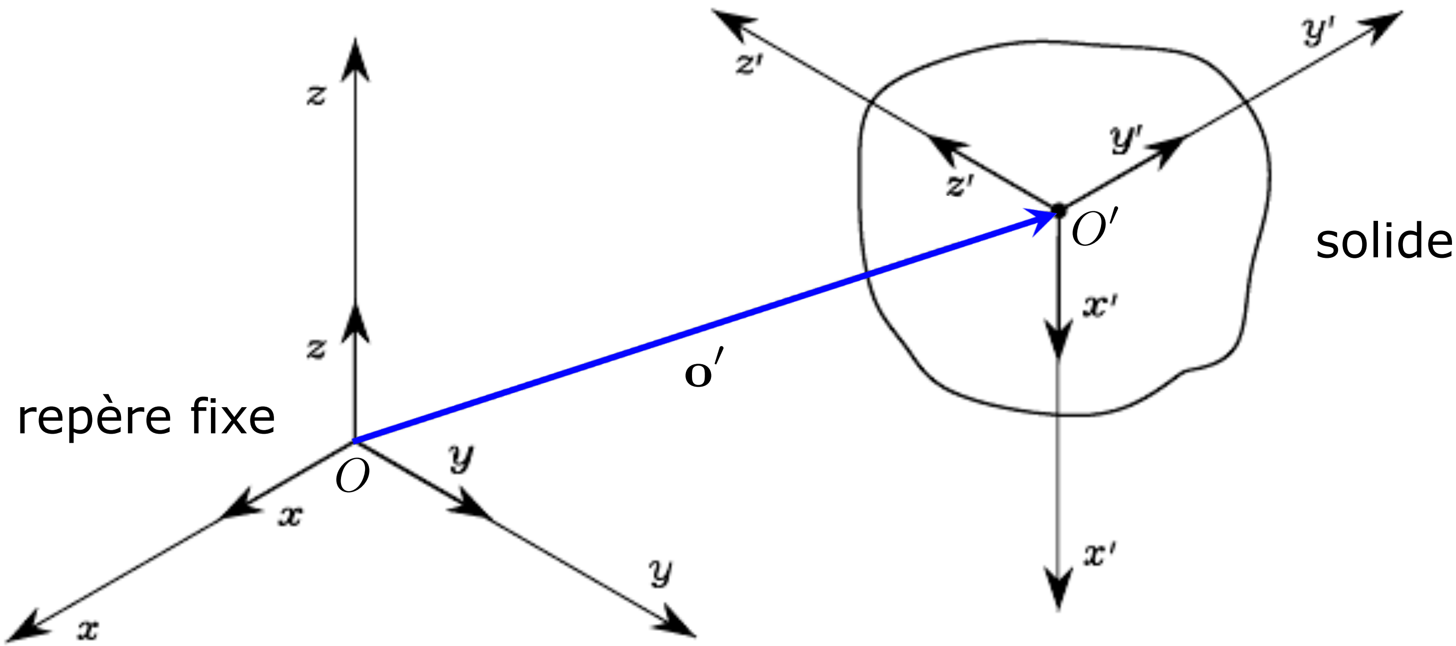
Positionnement

La **pose** d'un *solide* (ou corps rigide) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par *6 paramètres indépendants*:

- **3** paramètres indépendants définissent la **position** d'un point, noté *O'*, du solide dans le repère fixe *O*-xyz (par ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)

- **3** paramètres indépendants déterminent l'**orientation** du solide autour du point *O'* (par ex. les angles d'Euler)





La **position** du point *O′* du solide par rapport au repère fixe *O*-xyz s’exprime par l’equation :

$$\mathbf{o}' = o'_x\,\mathbf{x} + o'_y\,\mathbf{y} + o'_z\,\mathbf{z}$$

où $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ sont les vecteurs unitaires (la norme est 1) des axes du repère *O*-xyz et o'_x, o'_y, o'_z sont les composants du vecteur le long de chacun des trois axes $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$

• Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère *attaché au corps* et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère O-xyz

• Soit O'-$x'y'z'$ un tel repère avec origine O' et soient $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ les vecteurs unitaires des axes

• Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère O-xyz par les équations :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= x'_x\,\mathbf{x} + x'_y\,\mathbf{y} + x'_z\,\mathbf{z}\\ \mathbf{y}' &= y'_x\,\mathbf{x} + y'_y\,\mathbf{y} + y'_z\,\mathbf{z}\\ \mathbf{z}' &= z'_x\,\mathbf{x} + z'_y\,\mathbf{y} + z'_z\,\mathbf{z}\end{aligned}$$

• Sous forme compacte, les vecteurs unitaires $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ qui décrivent l'orientation du solide par rapport à O-xyz, peuvent être combinés dans la matrice 3×3:

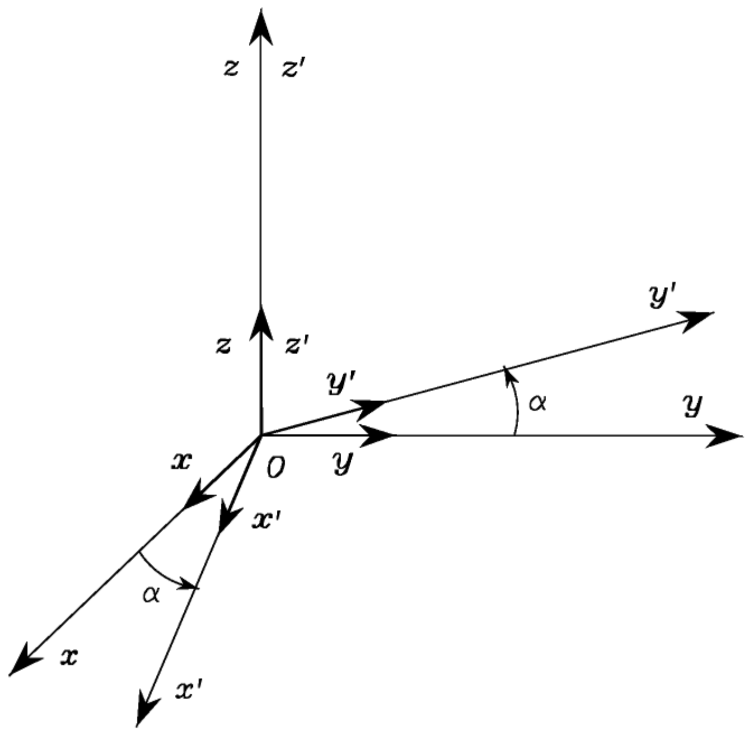
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T\mathbf{x} & \mathbf{y}'^T\mathbf{x} & \mathbf{z}'^T\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{y} & \mathbf{y}'^T\mathbf{y} & \mathbf{z}'^T\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T\mathbf{z} & \mathbf{y}'^T\mathbf{z} & \mathbf{z}'^T\mathbf{z} \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**

Rotations élémentaires

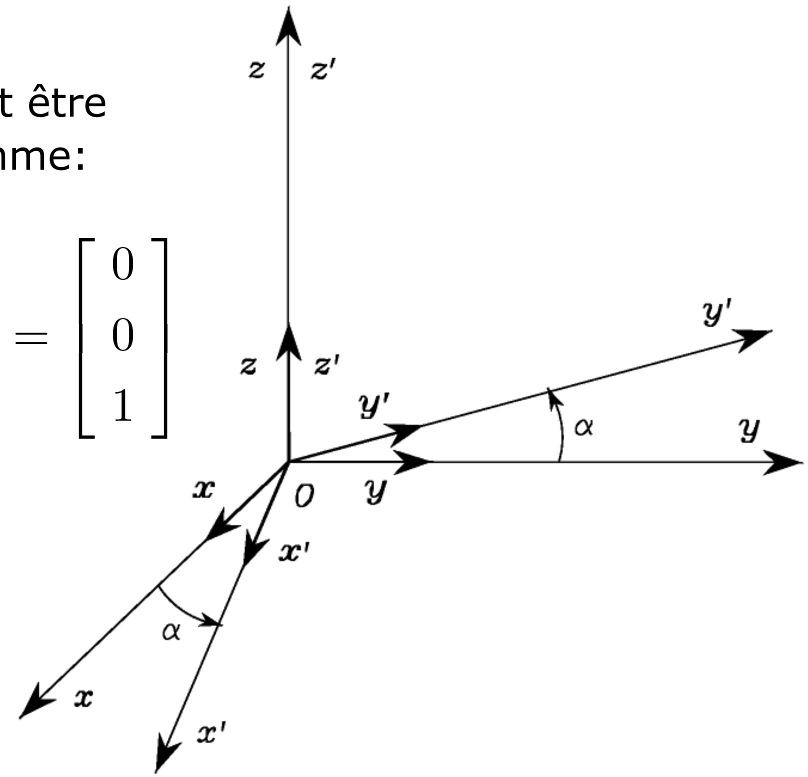
- Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes x, y, z
    - Ces rotations sont **positives** s'ils sont faites autour des axes relatifs dans le *sens antihoraire*

<u>Exemple</u>: le repère O-xyz est pivoté d'un angle α autour de l'axe z et O-$x'y'z'$ est le repère qui résulte de cette rotation



Rotations élémentaires

• Les vecteurs unitaires de *O*-$x'y'z'$ peuvent être exprimés par rapport au repère *O*-xyz comme:



$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• La matrice de rotation de *O*-$x'y'z'$ par rapport à *O*-xyz engendrée est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β et la matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

Remarque: ces matrices sont très utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'*axes arbitraires*

Rotations élémentaires: sommaire

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe x d'un angle γ

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe y d'un angle β

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour de l'axe z d'un angle α

Remarque:
Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

Représentation d'un vecteur

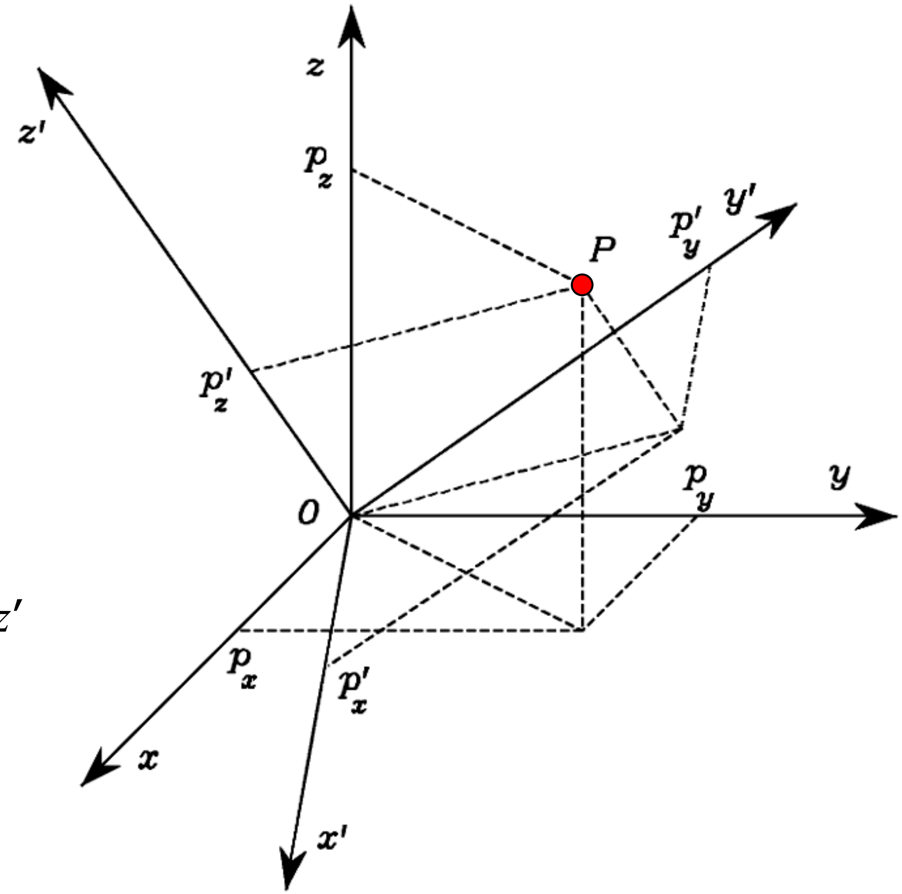
Hypothèse simplificatrice : l'origine du repère du solide coïncide avec l'origine du repère fixe. Donc $\mathbf{o}' = \mathbf{0}_{3\times 1} = [0,\, 0,\, 0]^T$

On peut représenter le point 3D P comme suit:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$ par rapport à *O*-xyz

et

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$ par rapport à *O*-$x'y'z'$



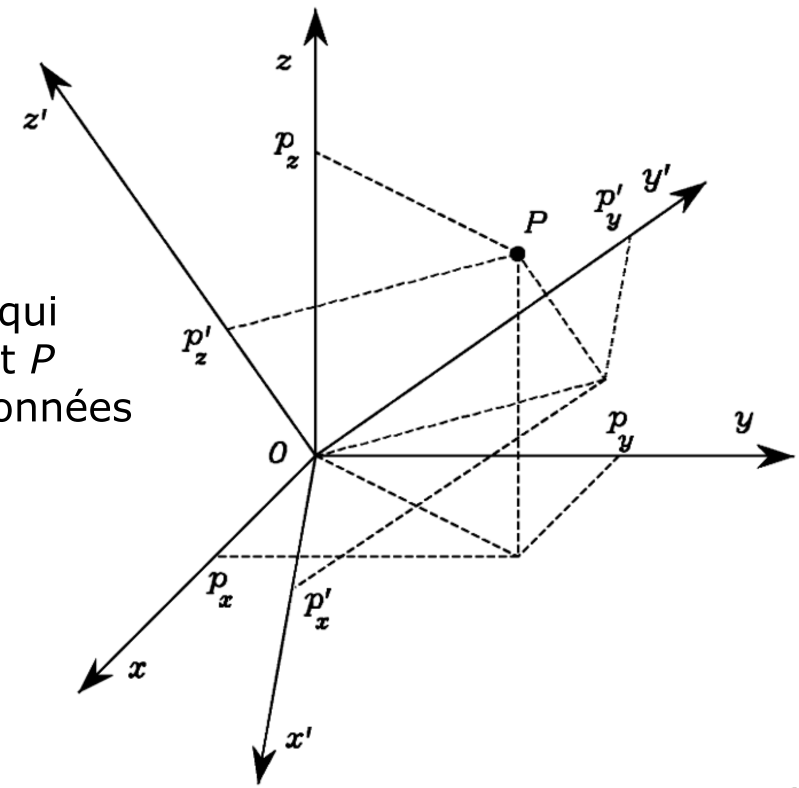
Représentation d'un vecteur

Mais $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ sont deux représentations du même point *P*, donc:

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

Mais cela signifie que (cf. les équations précédentes):

$$\boxed{\mathbf{p} = \mathbf{R}\,\mathbf{p}'}$$



$\mathbf{R}$ représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point *P* dans le repère *O*-xyz, en function des coordonnées du même point dans le repère *O*-$x'y'z'$

$\mathbf{R}$ est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$

Représentation d'un vecteur

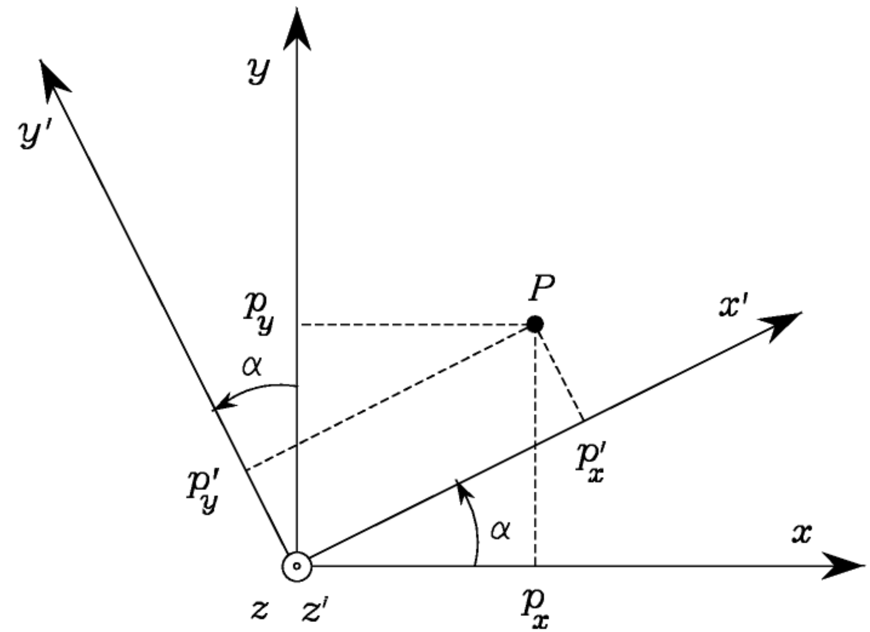
Exemple:

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle α autour de l'axe z

$\mathbf{p},\ \mathbf{p}'$: vecteurs des coordonnées du point *P* dans les repères *O*-xyz et *O*-$x'y'z'$

On trouve que:

$$p_x = p'_x \cos\alpha - p'_y \sin\alpha$$
$$p_y = p'_x \sin\alpha + p'_y \cos\alpha$$
$$p_z = p'_z$$



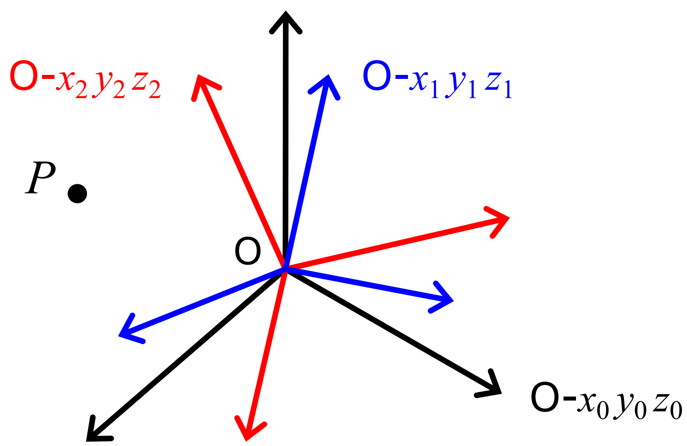
Remarque:
La matrice $\mathbf{R}_z(\alpha)$ représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre* avec la même origine

Composition de matrices de rotation

Problème: Comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères** O-$x_0 y_0 z_0$, O-$x_1 y_1 z_1$, O-$x_2 y_2 z_2$ avec la *même origine* O

$\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$ coordonnées d'un point P dans les trois repères



Composition de matrices de rotation

Soit $\mathbf{R}_i^j$ la matrice de rotation du repère i par rapport au repère j

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De la même façon, on obtient

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors:

$$\boxed{\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1}$$

Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec O-$x_0 y_0 z_0$

La rotation définie par $\mathbf{R}_2^0$ peut être interprétée comme obtenue en *deux étapes* :

1. Tourne le repère avec $\mathbf{R}_1^0$ pour l'aligner avec O-$x_1 y_1 z_1$

2. Tourne le repère, maintenant aligné avec O-$x_1 y_1 z_1$, en utilisant $\mathbf{R}_2^1$ pour l'aligner avec O-$x_2 y_2 z_2$

Remarque:
- La rotation d'ensemble peut être exprimée comme une séquence de *rotations partielles*
- Chaque rotation est définie par rapport à la *précédente*
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations
- Avec notre notation, on a que :

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

Composition de matrices de rotation

Remarque:
• Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées toujours par rapport au *repère initial*

• On dit donc que les rotations sont faites par rapport au **repère fixe**

• La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des matrices de rotation

---

Problème de base: le produit matriciel n'est pas *commutatif* !

• Deux rotations, en général, ne commutent pas et la composition dépend de l'ordre des rotations individuelles:

$$\boxed{\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0}$$

Composition de matrices de rotation

Exemple:

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\pi/6)\,\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

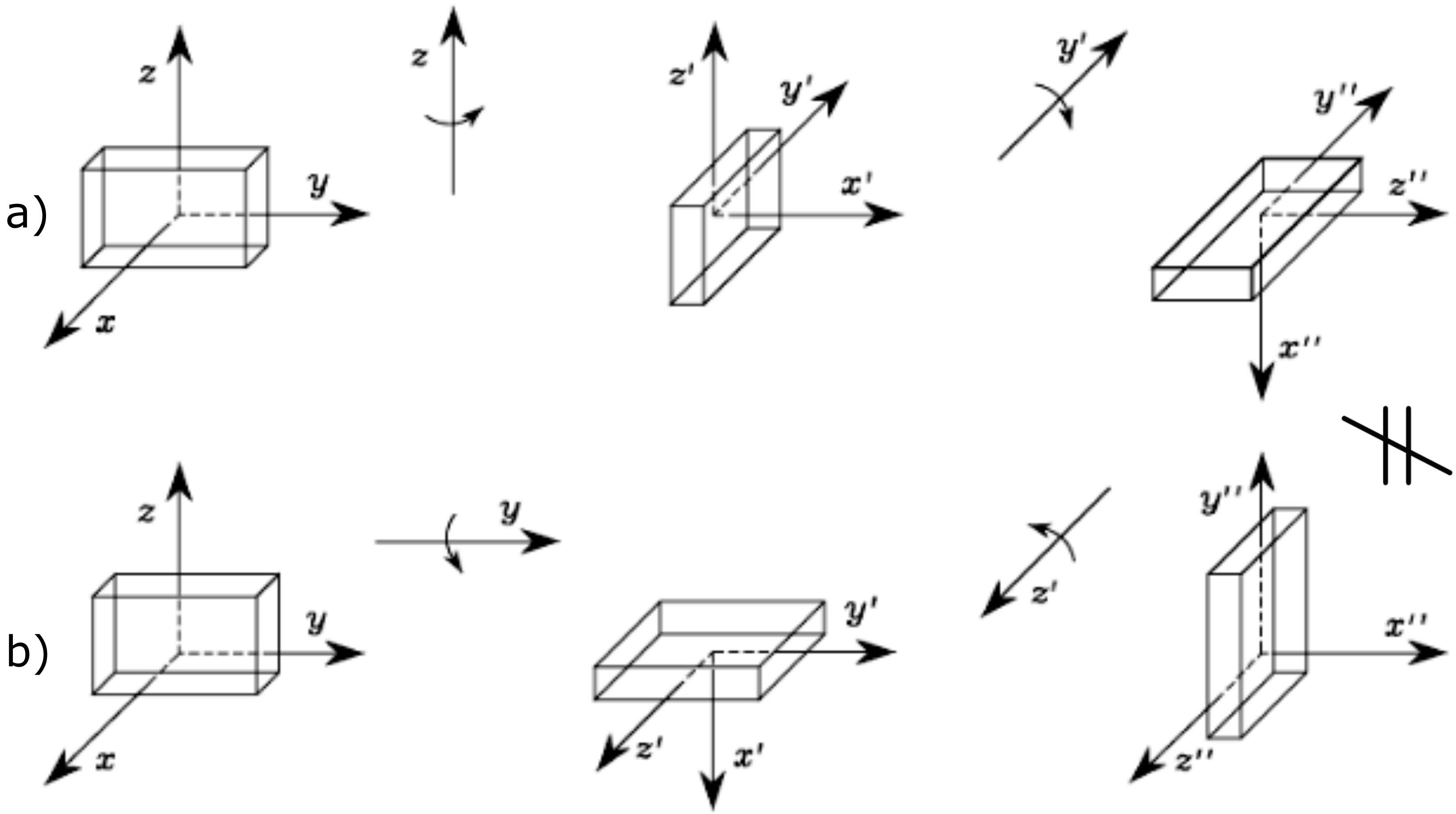
mais

$$\nparallel$$

$$\mathbf{R}_x(\pi/4)\,\mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

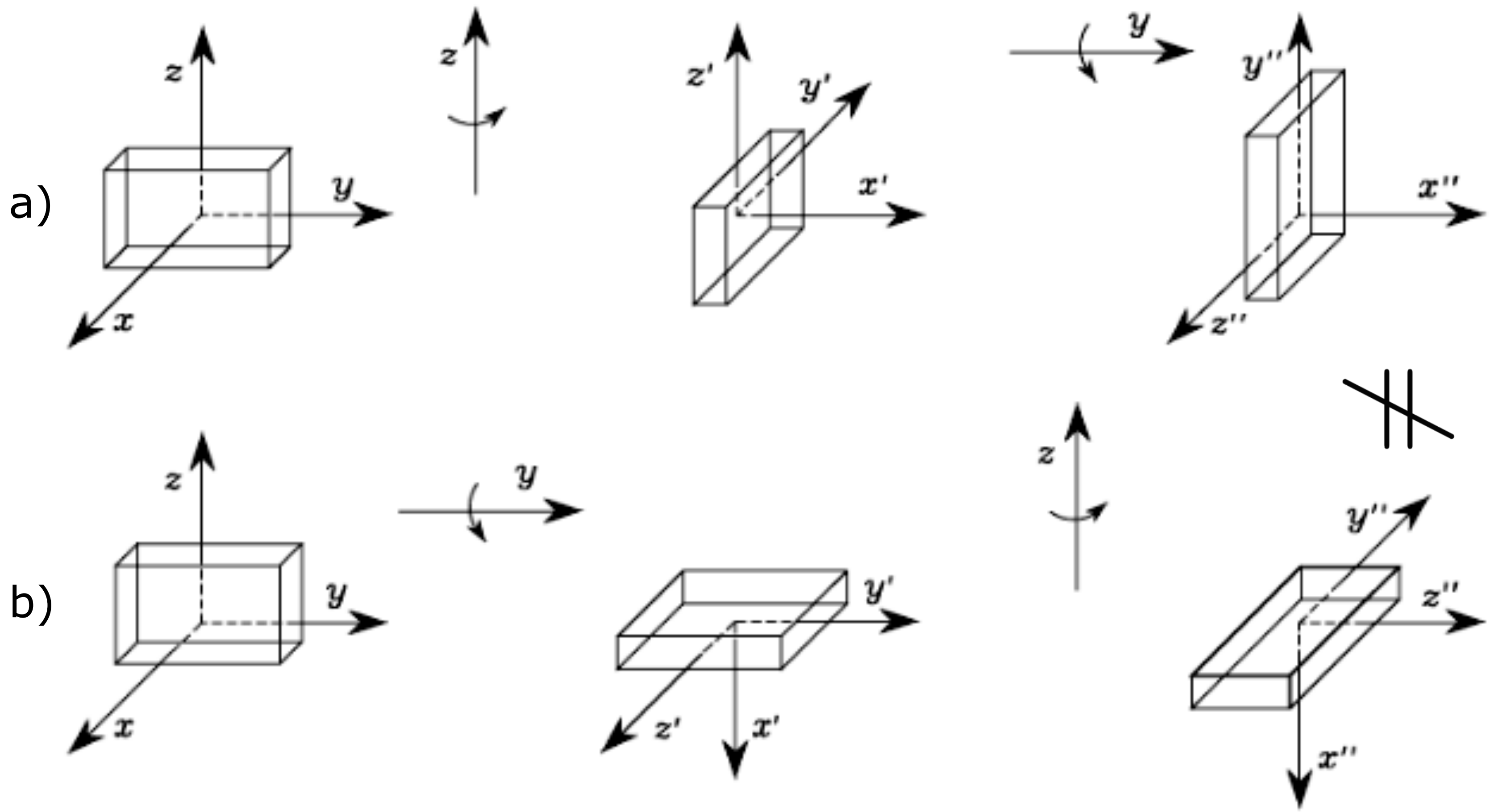
Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**



Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**



Représentation de l’orientation

- Les matrices de rotation fournissent une **description redondante** de l’orientation d’un corps

- En effet, la matrice de rotation $\mathbf{R}$ comprend 9 éléments :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Mais il y a 6 relations indépendantes entre ces éléments (*contraintes d’orthogonalité* et *de normalité* des colonnes) :

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 \qquad & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{33}^2 &= 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion: **3 paramètres** sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps

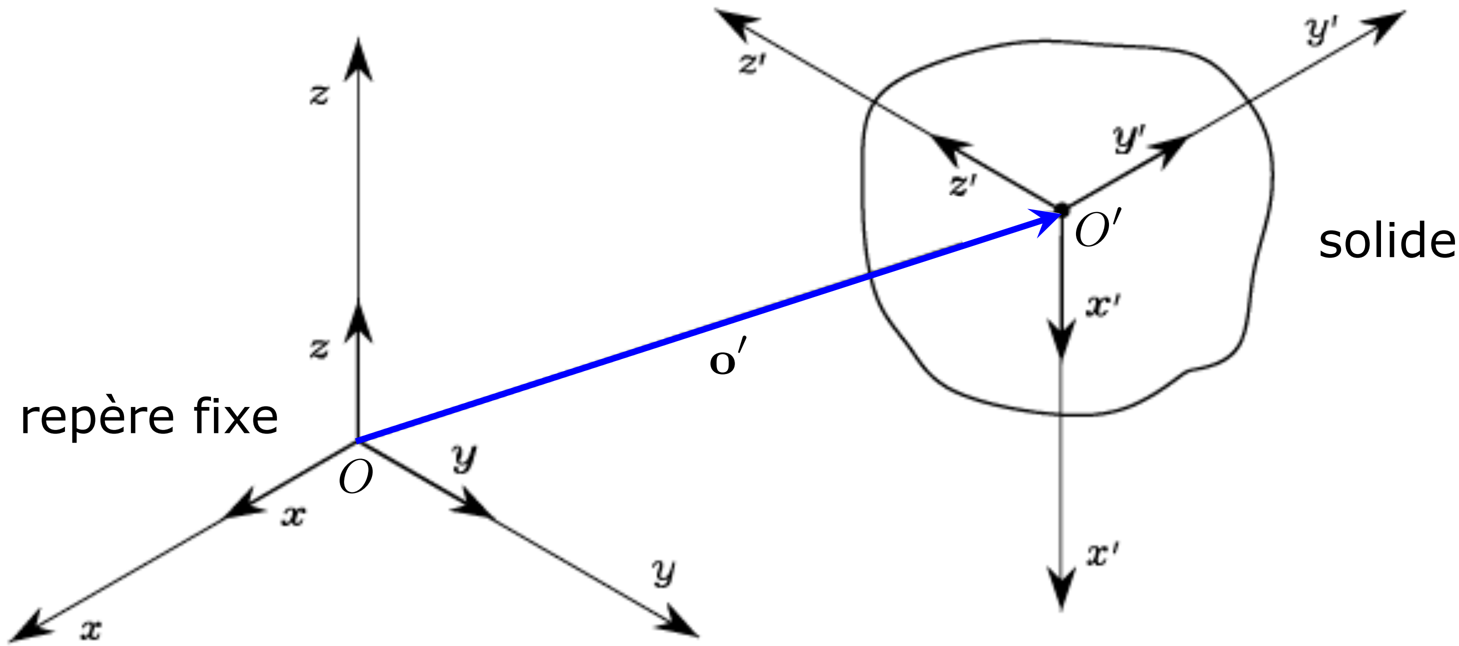
Une représentation de l'orientation en fonction de *3 paramètres indépendants* est dite **représentation minimale** (par ex. les trois angles d’Euler)

Représentation de l’orientation

Propriétés des 4 représentations de l’orientation d’un corps rigide

Représentation	**Matrice de rotation**	Angles d’Euler (ZYZ, ZYX, etc.)	Angle et axe	Quaternion unitaire
Globale	Oui	Non	Non	Oui
Unique	Oui	Non	Non	Non
Minimale	Non	Oui	Non	Non

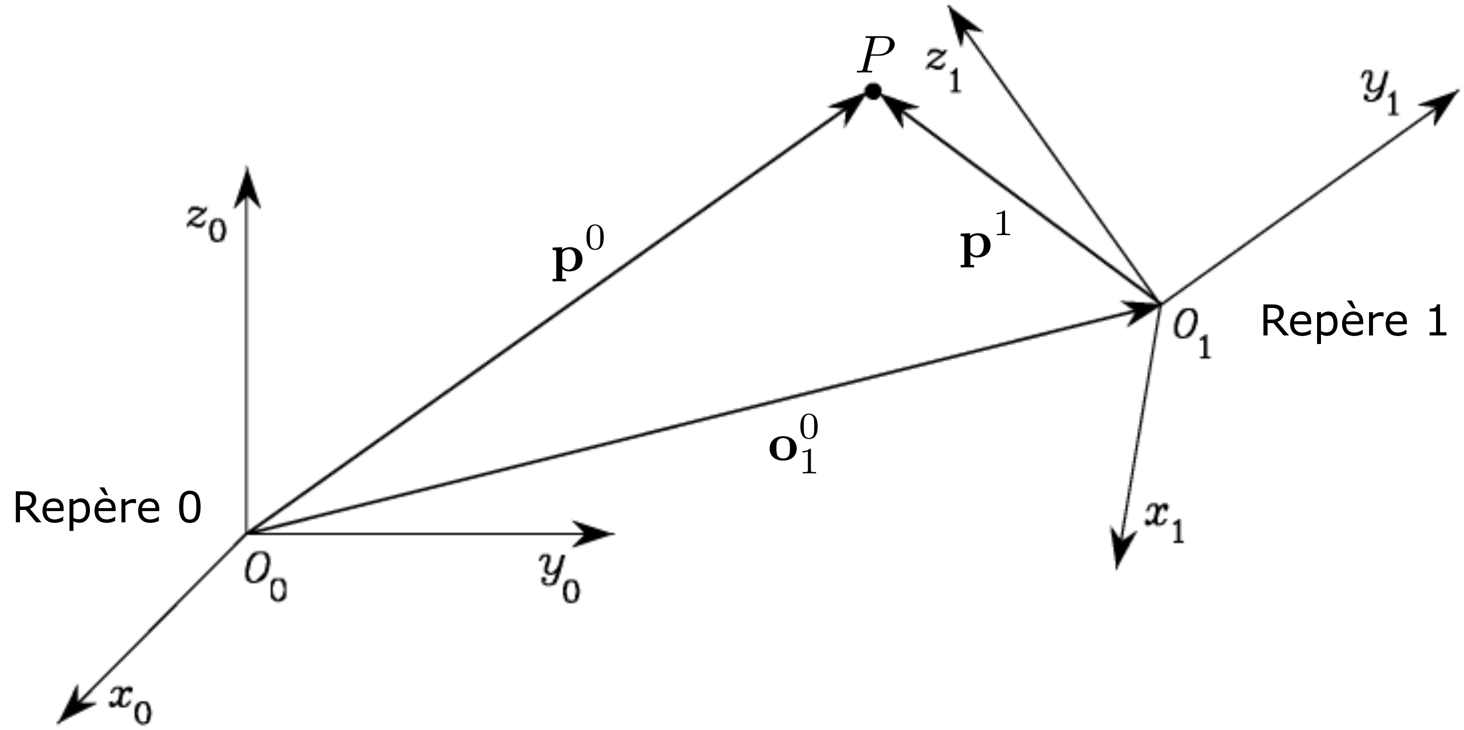
Matrices homogènes



Pour décrire la **pose** d'un solide dans l'espace 3D, on a besoin de connaître:

- [*Translation*] Position d'un point sur le solide (*O*') par rapport au repère fixe
- [*Rotation*] Composants des vecteurs unitaires du repère attaché au corps avec origine O', par rapport au repère fixe

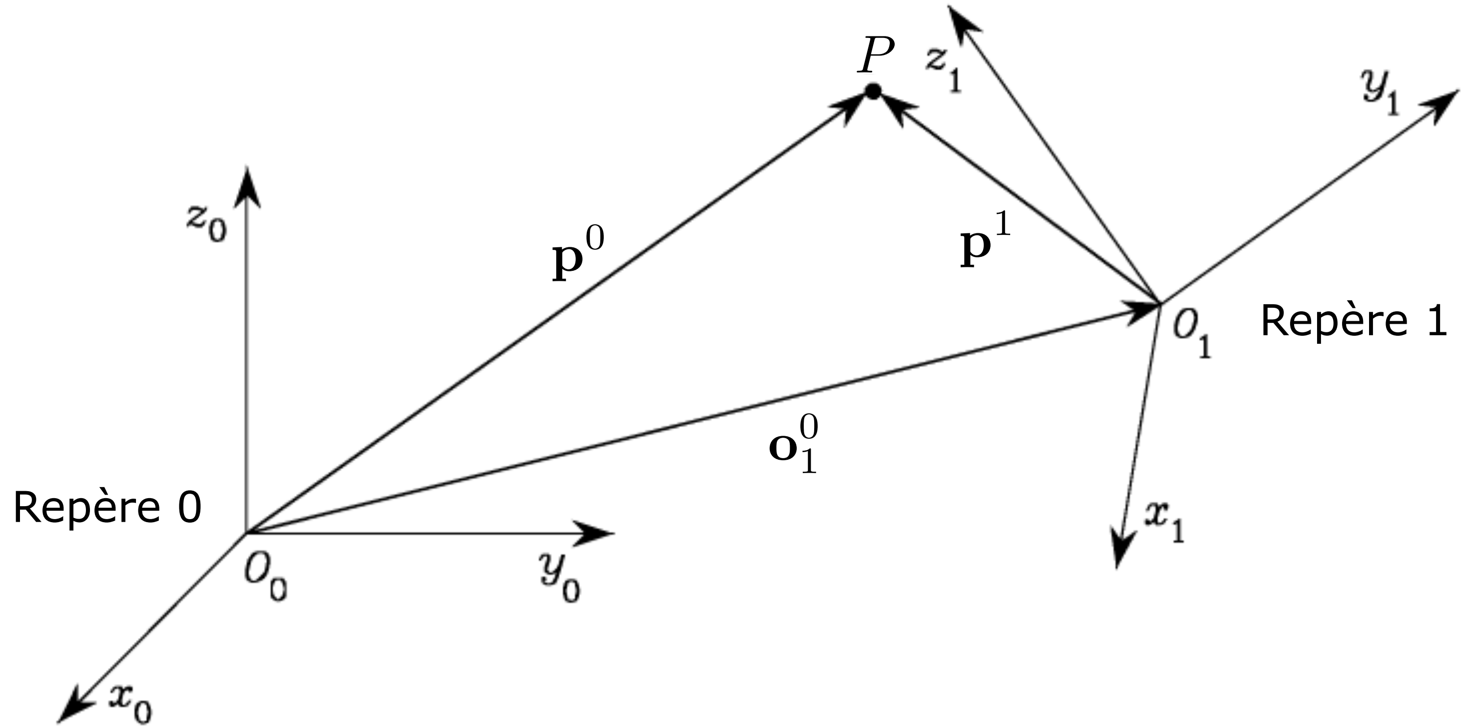
Matrices homogènes



Soit:

- P : point générique dans l'espace 3D
- $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1$: coordonnées du point P par rapport au repère 0 et 1
- $\mathbf{o}_1^0$: vecteur qui décrit l'origine du repère 1 par rapport au repère 0
- $\mathbf{R}_1^0$: matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0

Matrices homogènes

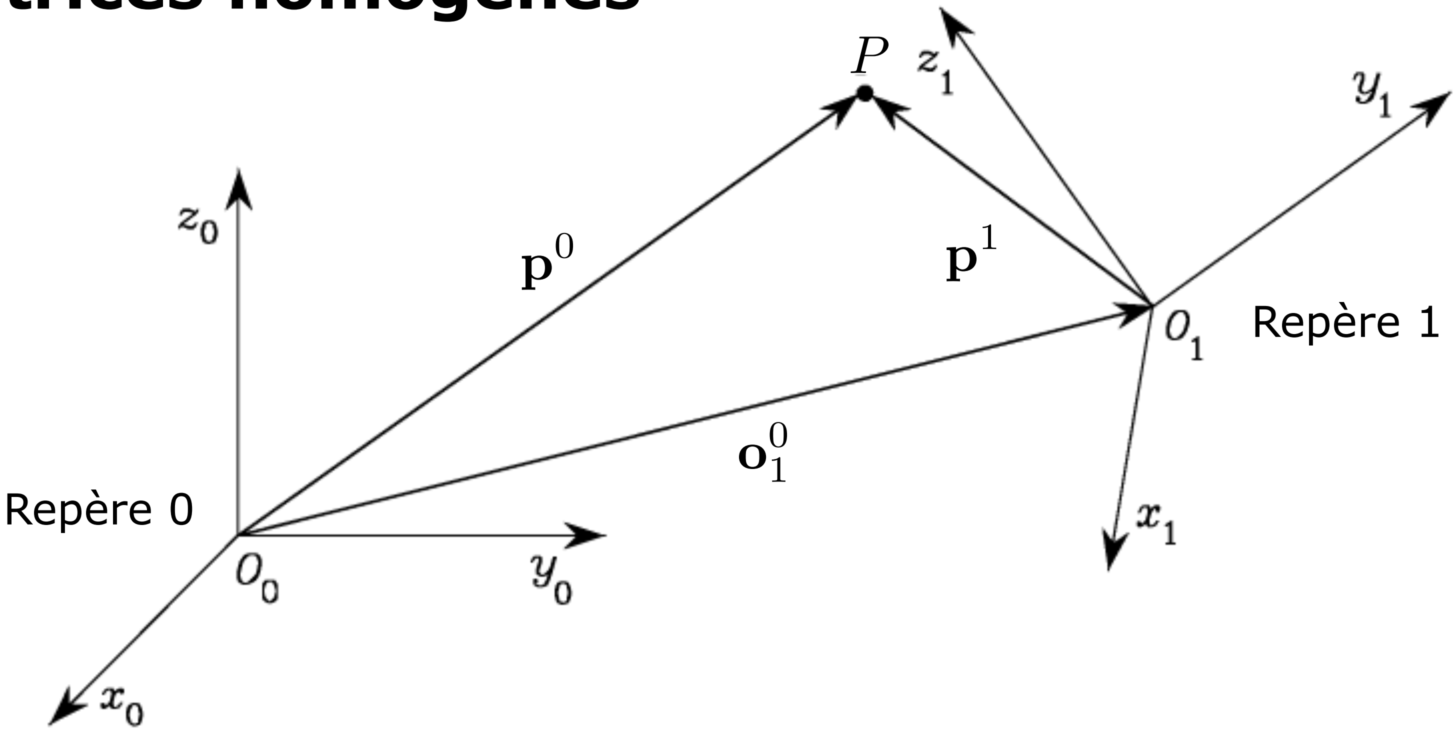


- On peut écrire la position du point *P* par rapport au repère 0 comme suit:

$$\boxed{\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\,\mathbf{p}^1}$$

Transformation de coordonnées
(translation + rotation) d'un vecteur
entre le repère 0 et le repère 1

Matrices homogènes



• Pour avoir une *représentation compacte* de la relation entre les coordonnées du même point *P* dans les deux repères, nous pouvons introduire la **représentation homogène** d'un vecteur générique $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$:

$\mathbf{p}$ "tilde"

$$\widetilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On rajoute une 4e coordonnée au vecteur, dont la valeur est 1

Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs $\mathbf{p}^0$ et $\mathbf{p}^1$, on peut écrire la transformation de coordonnées en utilisant *une seule matrice* 4×4:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation homogène

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple:

$$(\mathbf{o}_1^0, \mathbf{R}_1^0)$$

- La pose est définie par *6 paramètres*:
  - 3 définissant la *translation*
  - 3 définissant la *rotation*

Matrices homogènes

- La transformation d'un vecteur du repère 1 au repère 0 est exprimée par une seule matrice qui contient la matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0 et le vecteur de translation de l'origine du repère 0 à l'origine du repère 1:

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \, \widetilde{\mathbf{p}}^1}$$

- La **transformation inverse** entre le repère 0 et 1 est décrite par la matrice $\mathbf{A}_0^1$ qui satisfait l'équation:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \, \widetilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \, \widetilde{\mathbf{p}}^0$$

- En utilisant les propriétés des matrices partitionnées, on trouve que:

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \, \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices homogènes

Attention: les matrices homogènes ne satisfont pas la *propriété d'orthogonalité*.
Par conséquent, en général:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T}$$

En conclusion:

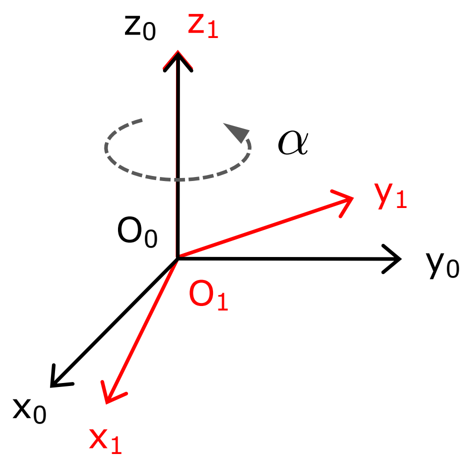
- Une matrice homogène permet d'exprimer la transformation de coordonnées entre deux repères *sous forme compacte*
- Si les repères ont la *même origine*, la matrice homogène se réduit à la *matrice de rotation* (4 × 4) définie précédemment
- Comme pour les matrices de rotation, on peut *composer* une séquence de transformations de coordonnées grâce au produit matriciel:

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \cdots \mathbf{A}_n^{n-1} \widetilde{\mathbf{p}}^n$$

où $\mathbf{A}_i^{i-1}$ est la matrice de transformation qui met en relation la description d'un point dans le repère i avec la description du même point dans le repère $i-1$

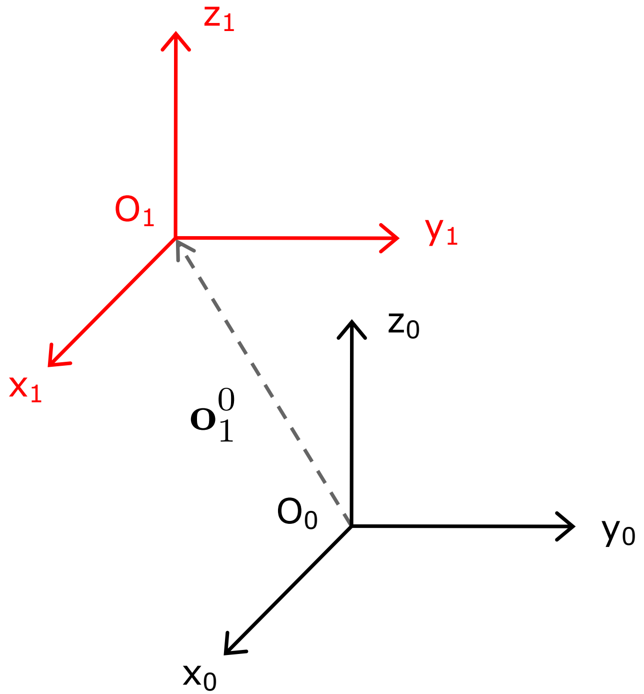
Matrices homogènes

Exemple 1 (Rotation simple autour de l'axe z) :



$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{0}_{3\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 (Translation simple) :



$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$