

# Initiation à la Robotique

**ME 5.1a**

Licence Professionnelle Automatismes et Robotique

Session 2025 - Amiens

**Fabio MORBIDI**

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

Université de Picardie Jules Verne

E-mail : [fabio.morbidi@u-picardie.fr](mailto:fabio.morbidi@u-picardie.fr)



Electronique

Energie Electrique

Automatique

**UNIVERSITÉ**  
de Picardie

Jules Verne

P

**P R O M E O**

PRIMEO  
pôle  
formation des  
industries technologiques  
CRÉATEUR DE COMPÉTENCES

PICARDIE

# Organisation du cours

n°	Date	matin/a.m.	CM	TD	Contrôle	Lieu
1	Ven. 4 oct. 2024	a.m.	CM1			Promeo, salle A120
2	Mer. 16 oct. 2024	a.m.	CM2	TD1		Dépt. EEA, TP204
3	Jeu. 17 oct. 2024	matin	CM3	TD2		Dépt. EEA, TP204
4	Jeu. 5 déc. 2024	a.m.	CM4	TD3		Dépt. EEA, TP204
5	Ven. 6 déc. 2024	a.m.			<b>DS</b>	Dépt. EEA, TP204
6	Ven. 10 jan. 2025	a.m.			<b>TP1</b>	Dépt. EEA 
7	Jeu. 23 jan. 2025	matin			<b>TP2</b>	Dépt. EEA 
8	Ven. 24 jan. 2025	matin			<b>TP3</b>	Dépt. EEA 

**Matin:** 8h30-12h15, pause 10h30-10h45 – **Après-midi:** 13h15-17h00, pause 15h30-15h45

Chargé de TD : Daniel Rodrigues da Costa (laboratoire MIS, UPJV)

# Plan du cours

- Introduction
- Constituants et caractéristiques d'un robot
- Gammes de robots et secteurs d'activités
- Les baies de commandes, le boîtier d'apprentissage, les modes et la programmation d'un robot
- Actionneurs et capteurs d'un robot
- Repères et transformations homogènes
- Étude de cas: cellule robotisée de soudage



# Notation

$$a, \gamma, M \in \mathbb{R}$$

scalaires

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

vecteur *colonne* de dimension  $n$ ,  $\mathbf{x} =$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice avec  $n$  lignes et  $m$  colonnes

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

matrice identité  $n \times n$

$$\mathbf{0}_{n \times m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

matrice de zéros  $n \times m$

$$\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

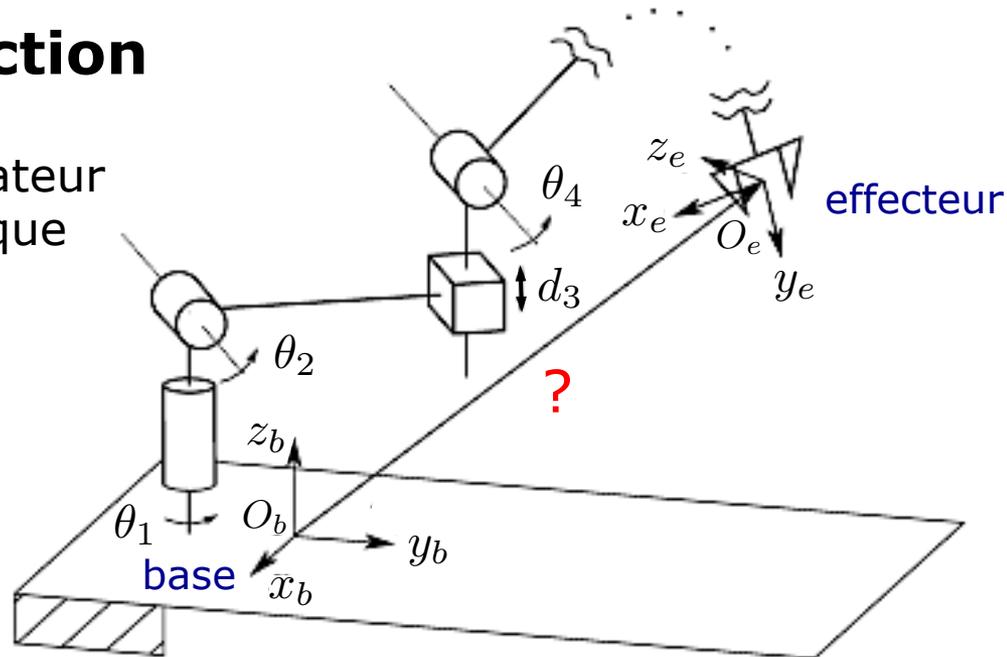
transposée de la matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

inverse de la matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (de rang plein)

# Introduction

Manipulateur  
générique



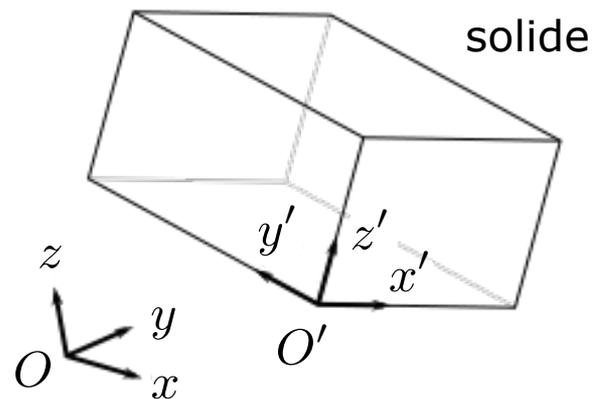
- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

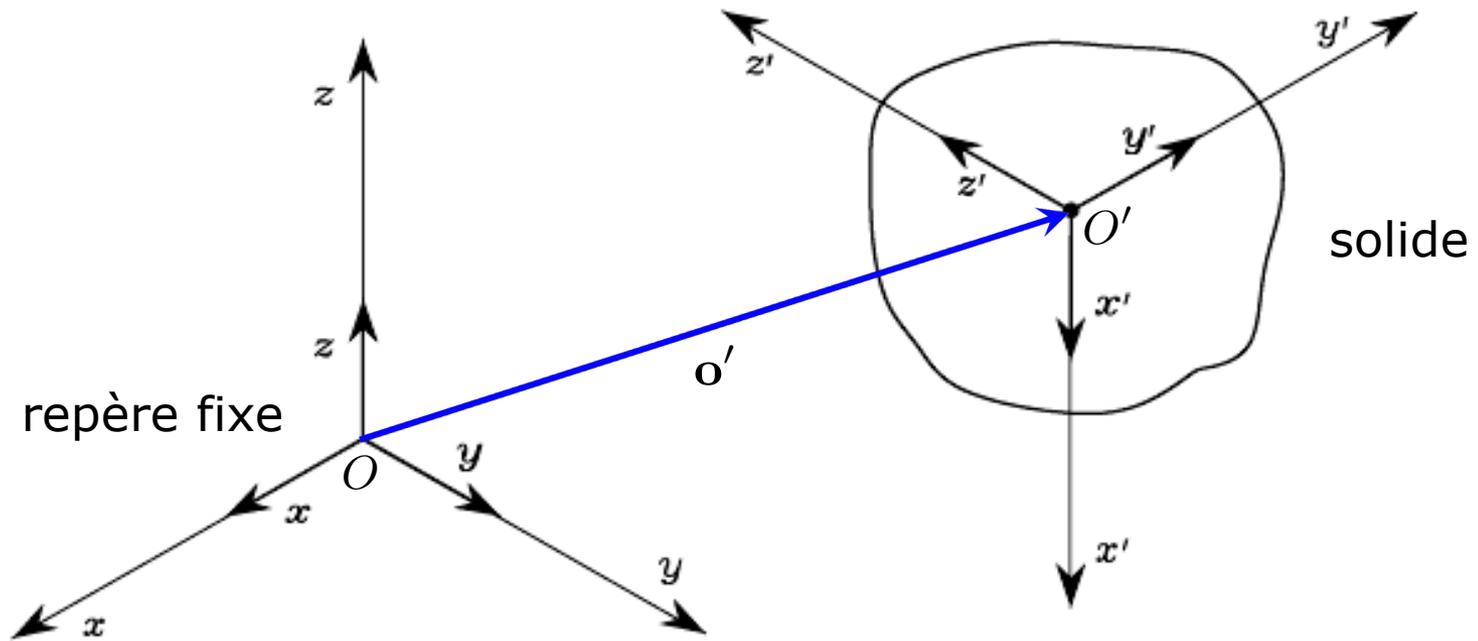
**Objectif final** : exprimer la pose de l'effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (par ex. le repère de la base)

## Positionnement

La **pose** d'un *solide* (ou corps rigide) dans l'espace 3D peut être complètement décrite par **6 paramètres indépendants**:

- **3** paramètres indépendants définissent la **position** d'un point, noté  $O'$ , du solide dans le repère fixe  $O$ - $xyz$  (par ex. coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques)
- **3** paramètres indépendants déterminent l'**orientation** du solide autour du point  $O'$  (par ex. les angles d'Euler)





La **position** du point  $O'$  du solide par rapport au repère fixe  $O$ - $xyz$  s'exprime par l'équation :

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z}$$

où  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  sont les vecteurs unitaires (la norme est 1) des axes du repère  $O$ - $xyz$  et  $o'_x$ ,  $o'_y$ ,  $o'_z$  sont les composantes du vecteur le long de chacun des trois axes  $\mathbf{o}' \in \mathbb{R}^3$

- Afin de décrire l'**orientation** du solide, considérons un repère *attaché au corps* et exprimons ses vecteurs unitaires par rapport au repère  $O-xyz$
- Soit  $O'-x'y'z'$  un tel repère avec origine  $O'$  et soient  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{z}'$  les vecteurs unitaires des axes
- Ces vecteurs sont exprimés par rapport au repère  $O-xyz$  par les équations :

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$

- Sous forme compacte, les vecteurs unitaires  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y}'$ ,  $\mathbf{z}'$  qui décrivent l'orientation du solide par rapport à  $O-xyz$ , peuvent être combinés dans la matrice  $3 \times 3$ :

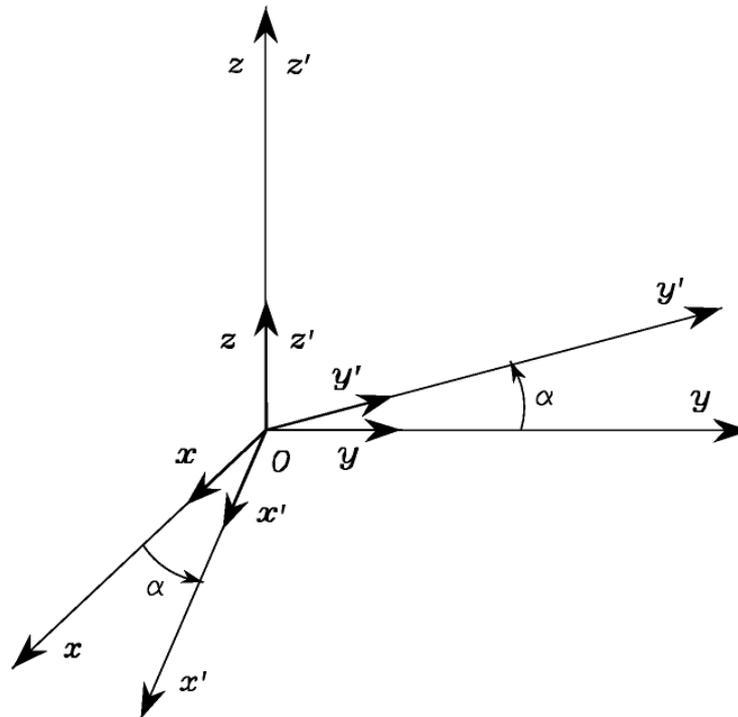
$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

qui est appelée **matrice de rotation**

# Rotations élémentaires

- Considérons les rotations qu'on peut obtenir à partir de **rotations élémentaires** autour des axes  $x, y, z$ 
  - Ces rotations sont **positives** s'ils sont faites autour des axes relatifs dans le *sens antihoraire*

**Exemple:** le repère  $O-xyz$  est pivoté d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$  et  $O-x'y'z'$  est le repère qui résulte de cette rotation



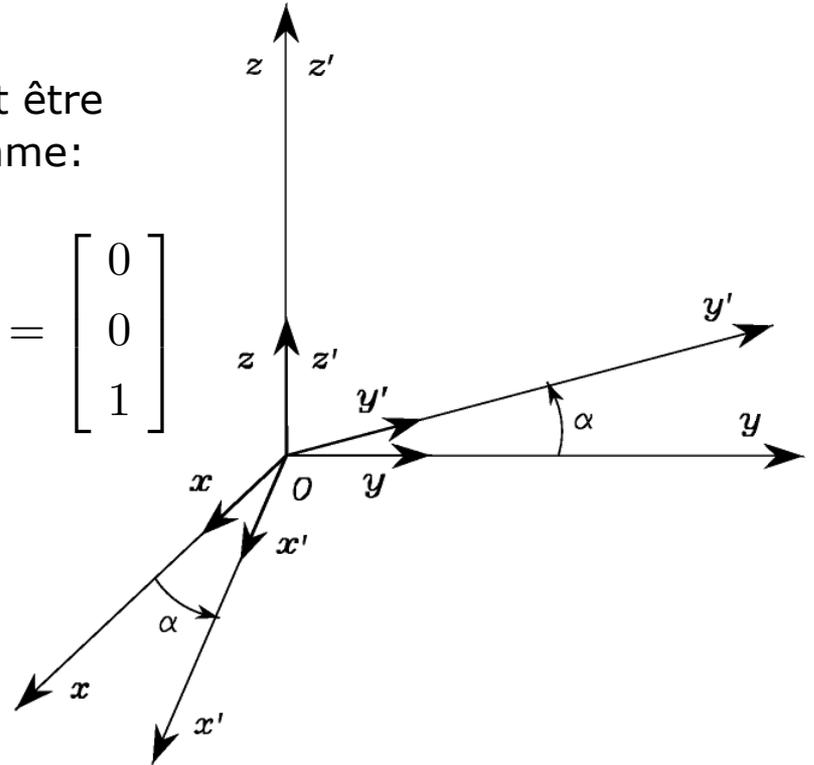
# Rotations élémentaires

- Les vecteurs unitaires de  $O-x'y'z'$  peuvent être exprimés par rapport au repère  $O-xyz$  comme:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice de rotation de  $O-x'y'z'$  par rapport à  $O-xyz$  engendrée est donc:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



De la même façon, on peut trouver la matrice de rotation autour de l'axe  $y$  d'un angle  $\beta$  et la matrice de rotation autour de l'axe  $x$  d'un angle  $\gamma$

**Remarque:** ces matrices sont très utiles pour décrire des rotations dans l'espace 3D autour d'axes *arbitraires*

## Rotations élémentaires: sommaire

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour  
de l'axe  $x$  d'un angle  $\gamma$

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour  
de l'axe  $y$  d'un angle  $\beta$

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation autour  
de l'axe  $z$  d'un angle  $\alpha$

### Remarque:

Pour les rotations élémentaires, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathbf{R}_x(-\gamma) = \mathbf{R}_x^T(\gamma), \quad \mathbf{R}_y(-\beta) = \mathbf{R}_y^T(\beta), \quad \mathbf{R}_z(-\alpha) = \mathbf{R}_z^T(\alpha)$$

# Représentation d'un vecteur

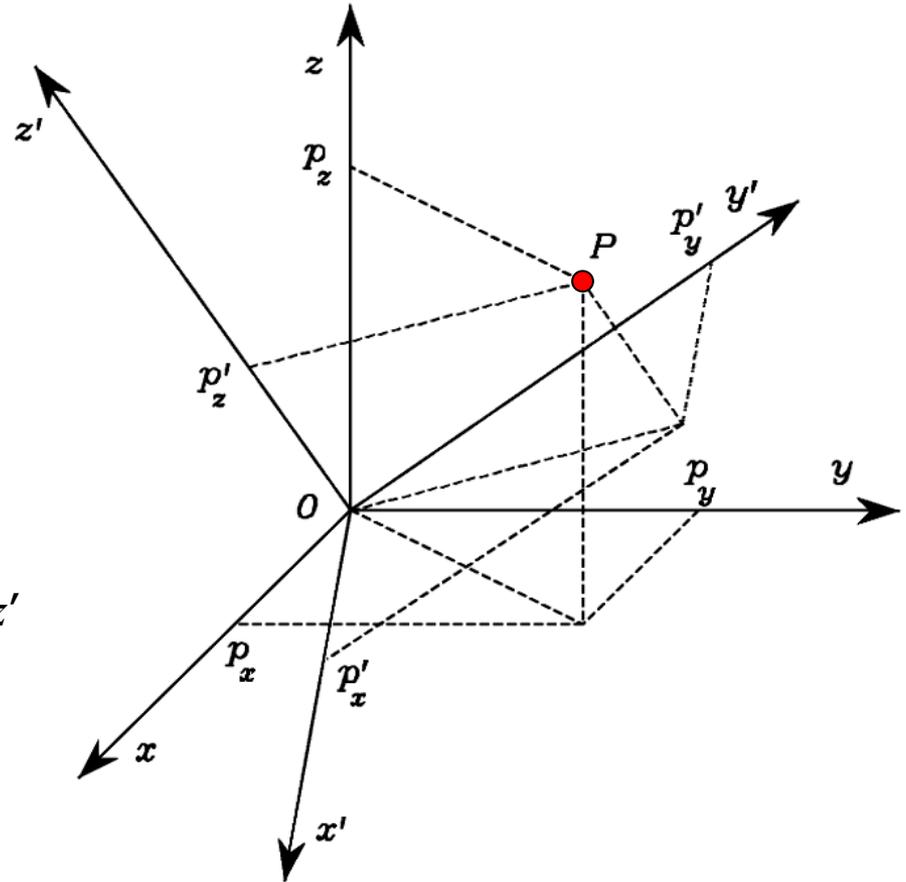
*Hypothèse simplificatrice* : l'origine du repère du solide coïncide avec l'origine du repère fixe. Donc  $\mathbf{o}' = \mathbf{0}_{3 \times 1} = [0, 0, 0]^T$

On peut représenter le point 3D  $P$  comme suit:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad \text{par rapport à } O\text{-}xyz$$

et

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \quad \text{par rapport à } O\text{-}x'y'z'$$



# Représentation d'un vecteur

Mais  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p}'$  sont deux représentations du même point  $P$ , donc:

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}'$$

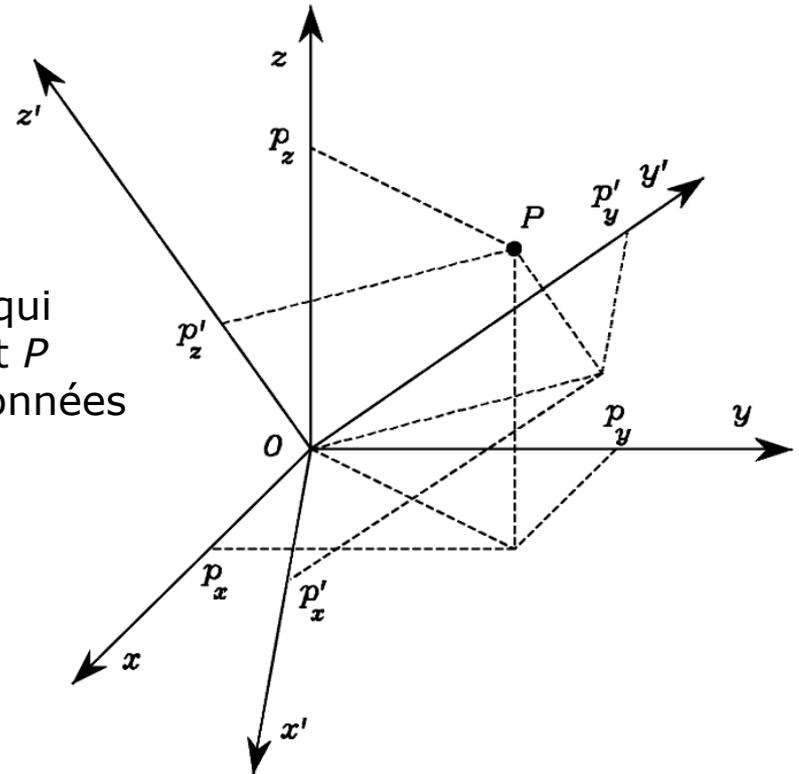
Mais cela signifie que (cf. les équations précédentes):

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

$\mathbf{R}$  représente la matrice de transformation qui permet d'exprimer les coordonnées du point  $P$  dans le repère  $O-xyz$ , en fonction des coordonnées du même point dans le repère  $O-x'y'z'$

$\mathbf{R}$  est une *matrice orthogonale*. Donc la transformation inverse est simplement:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$



# Représentation d'un vecteur

## Exemple:

Deux repères avec la même origine et une rotation relative d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $z$

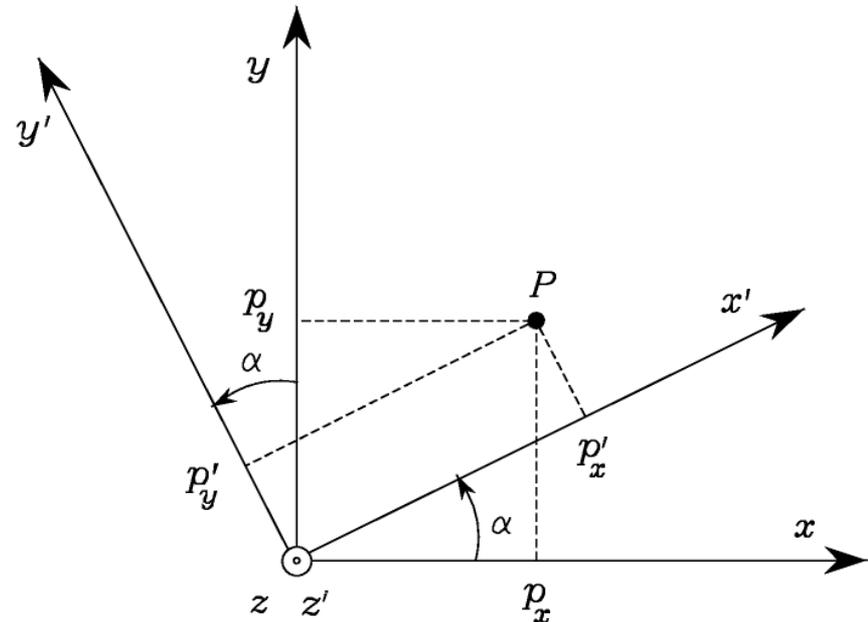
$\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$ : vecteurs des coordonnées du point  $P$  dans les repères  $O-xyz$  et  $O-x'y'z'$

On trouve que:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$



## **Remarque:**

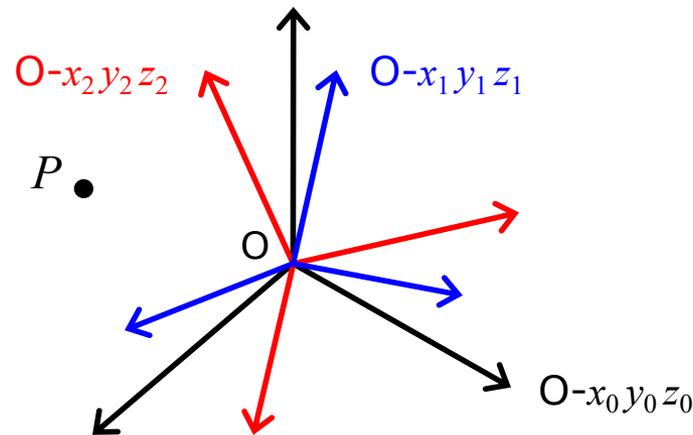
La matrice  $\mathbf{R}_z(\alpha)$  représente non seulement l'orientation d'un repère par rapport à un autre, mais elle décrit également la *transformation d'un vecteur dans un repère en un autre* avec la même origine

# Composition de matrices de rotation

**Problème:** Comment composer plusieurs rotations ?

Considérons **trois repères**  $O-x_0y_0z_0$ ,  $O-x_1y_1z_1$ ,  $O-x_2y_2z_2$  avec la *même origine*  $O$

$\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2 \in \mathbb{R}^3$  coordonnées d'un point  $P$  dans les trois repères



# Composition de matrices de rotation

Soit  $\mathbf{R}_i^j$  la matrice de rotation du repère  $i$  par rapport au repère  $j$

Donc

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2$$

De la même façon, on obtient

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2$$

Mais alors:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

# Composition de matrices de rotation

Considérons un repère initialement aligné avec  $O-x_0y_0z_0$

La rotation définie par  $\mathbf{R}_2^0$  peut être interprétée comme obtenue en *deux étapes* :

1. Tourne le repère avec  $\mathbf{R}_1^0$  pour l'aligner avec  $O-x_1y_1z_1$
2. Tourne le repère, maintenant aligné avec  $O-x_1y_1z_1$ , en utilisant  $\mathbf{R}_2^1$  pour l'aligner avec  $O-x_2y_2z_2$

## Remarque:

- La rotation d'ensemble peut être exprimée comme une séquence de *rotations partielles*
- Chaque rotation est définie par rapport à la *précédente*
- Le repère par rapport à lequel la rotation se produit est appelé **repère courant**
- La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à droite** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des rotations
- Avec notre notation, on a que :

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

# Composition de matrices de rotation

## Remarque:

- Les rotations successives peuvent aussi être spécifiées toujours par rapport au *repère initial*
  - On dit donc que les rotations sont faites par rapport au **repère fixe**
  - La composition de rotations successives est obtenue par **multiplication à gauche** des matrices de rotation en suivant l'ordre donné des matrices de rotation
- 

**Problème de base** : le produit matriciel n'est pas *commutatif* !

- Deux rotations, en général, ne commutent pas et la composition dépend de l'ordre des rotations individuelles :

$$\mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \neq \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

# Composition de matrices de rotation

**Exemple:**

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

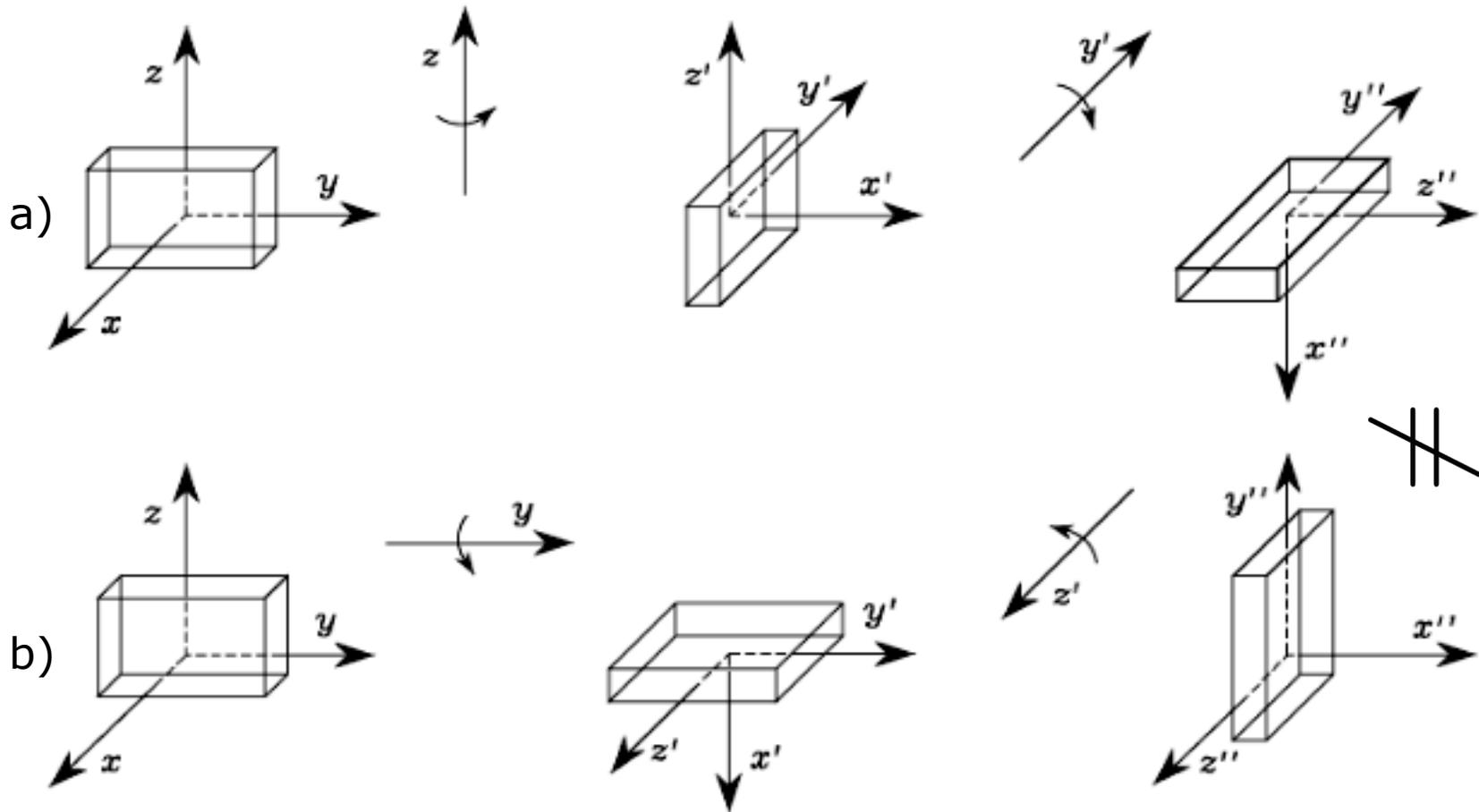
$$\mathbf{R}_y(\pi/6) \mathbf{R}_x(\pi/4) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/2 & \sqrt{6}/4 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

mais ~~||~~

$$\mathbf{R}_x(\pi/4) \mathbf{R}_y(\pi/6) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/4 \end{bmatrix}$$

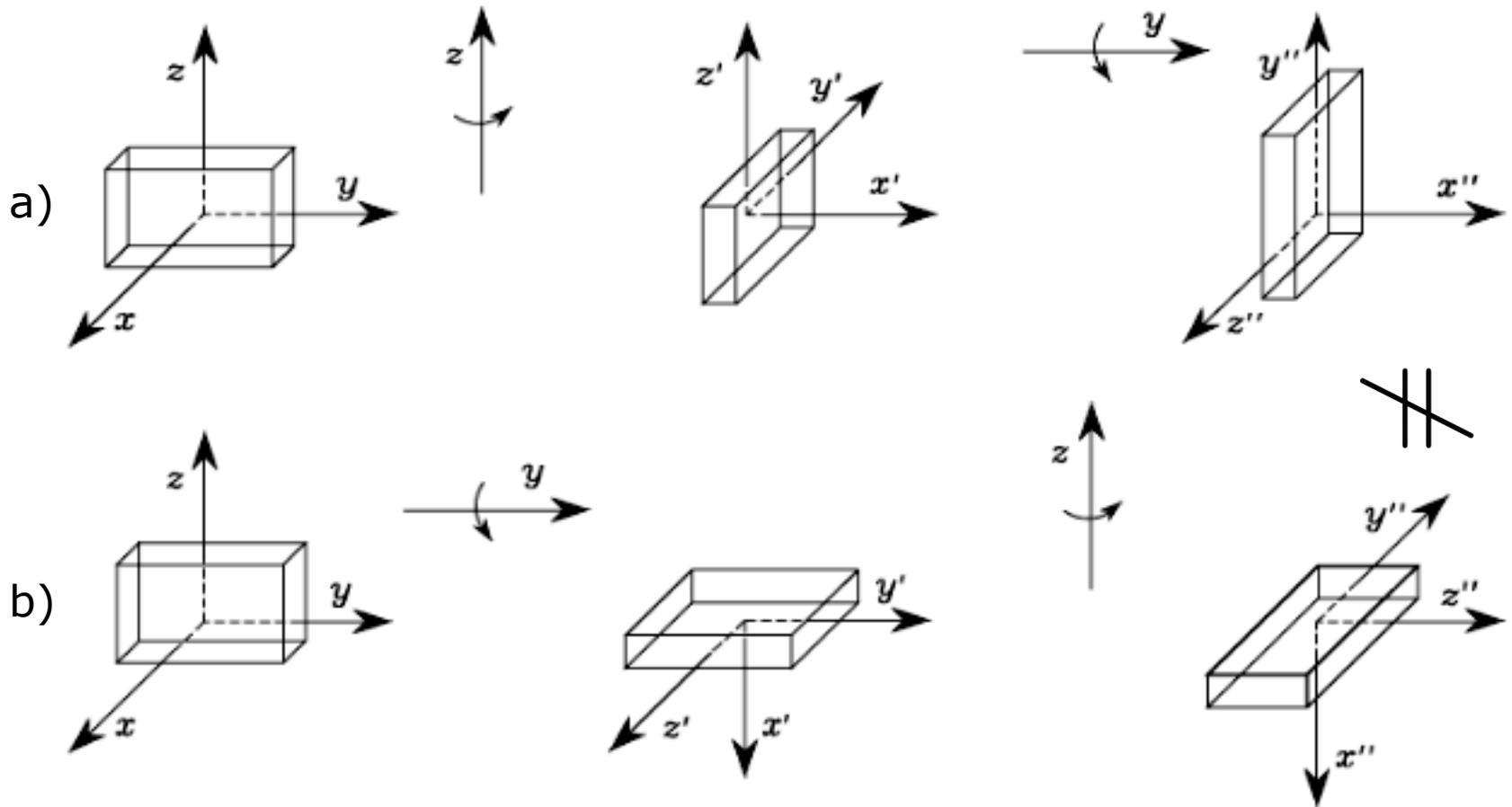
# Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère courant**



# Composition de matrices de rotation

- Rotations successives d'un objet autour des axes du **repère fixe**



# Représentation de l'orientation

- Les matrices de rotation fournissent une **description redondante** de l'orientation d'un corps
- En effet, la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  comprend 9 éléments :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Mais il y a **6 relations indépendantes** entre ces éléments (*contraintes d'orthogonalité et de normalité des colonnes*) :

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} &= 0 & r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 &= 1 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} &= 0 & r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 &= 1 \\ r_{12}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{33} &= 0 & r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned}$$

**Conclusion** : **3 paramètres** sont suffisants pour décrire l'orientation d'un corps

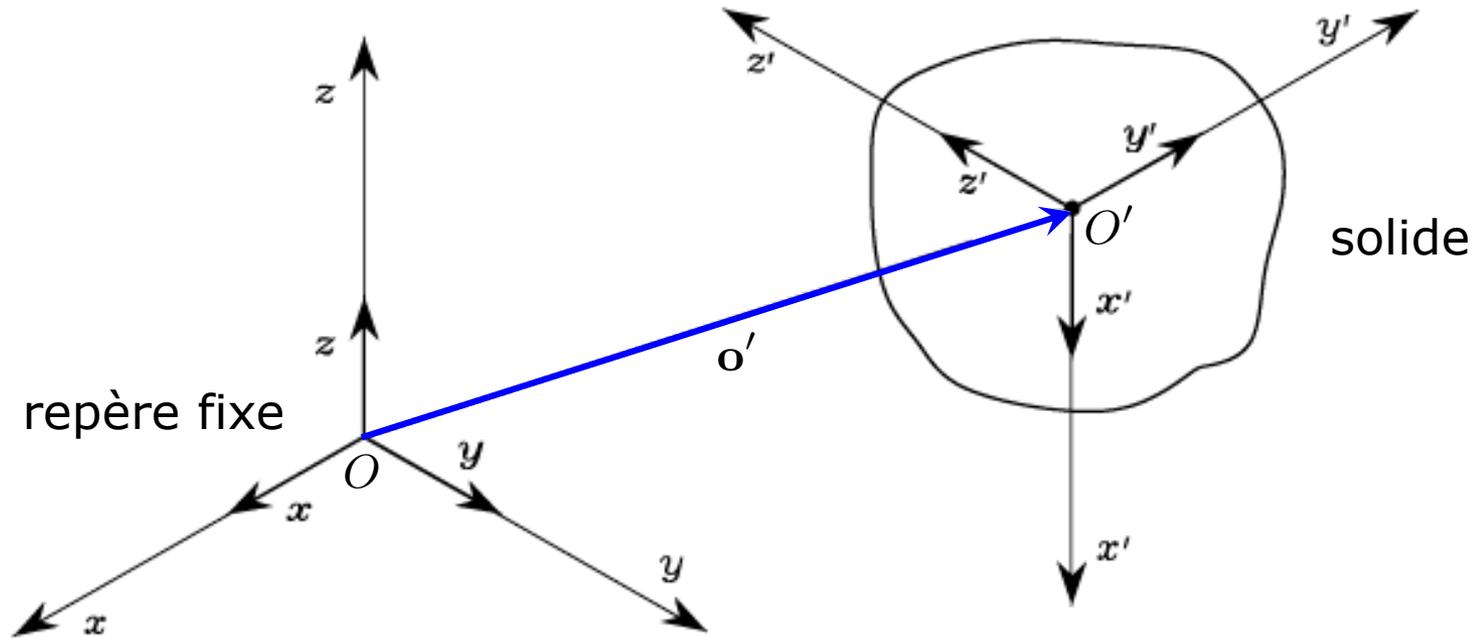
Une représentation de l'orientation en fonction de *3 paramètres indépendants* est dite **représentation minimale** (par ex. les trois angles d'Euler)

# Représentation de l'orientation

Propriétés des 4 représentations de l'orientation d'un corps rigide

Représentation	<b>Matrice de rotation</b>	Angles d'Euler (ZYZ, ZYX, etc.)	Angle et axe	Quaternion unitaire
<b>Globale</b>	Oui	Non	Non	Oui
<b>Unique</b>	Oui	Non	Non	Non
<b>Minimale</b>	Non	Oui	Non	Non

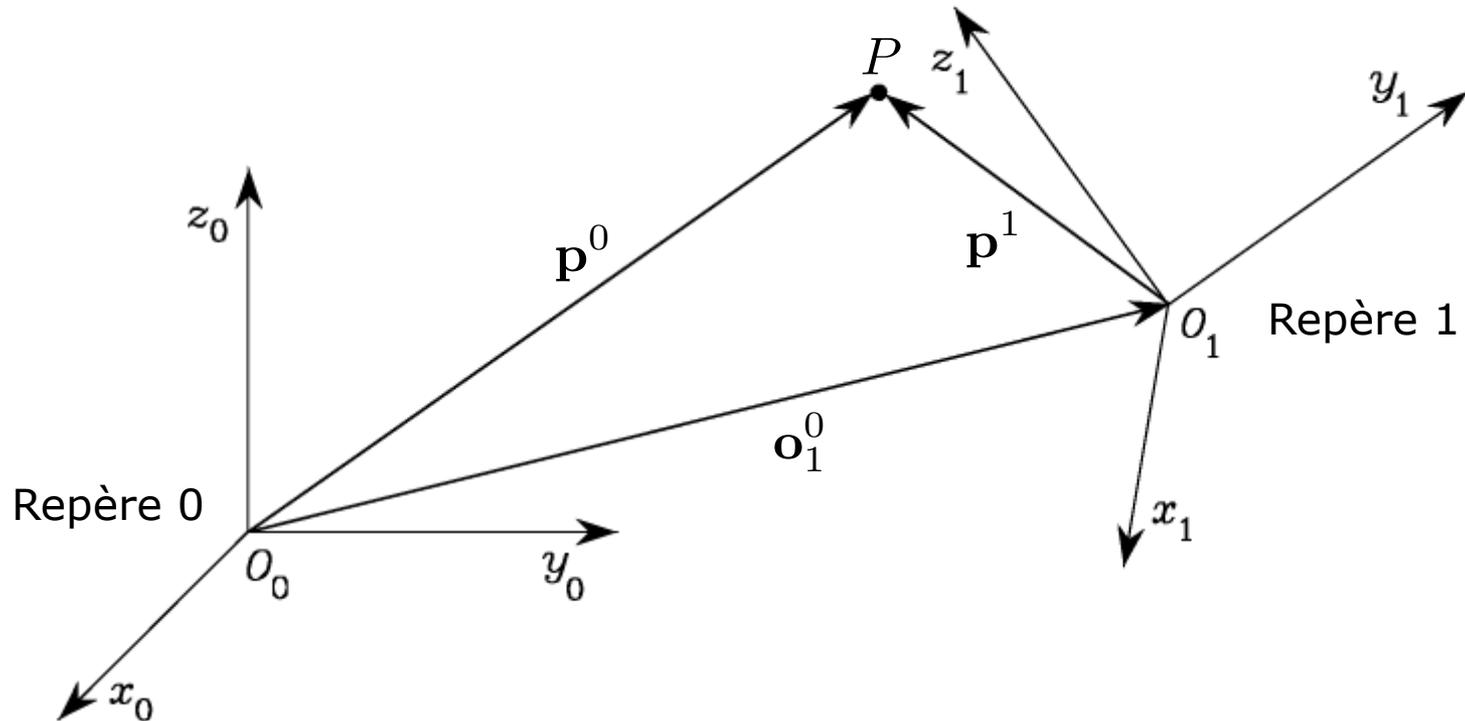
# Matrices homogènes



Pour décrire la **pose** d'un solide dans l'espace 3D, on a besoin de connaître :

- [*Translation*] Position d'un point sur le solide ( $O'$ ) par rapport au repère fixe
- [*Rotation*] Composants des vecteurs unitaires du repère attaché au corps avec origine  $O'$ , par rapport au repère fixe

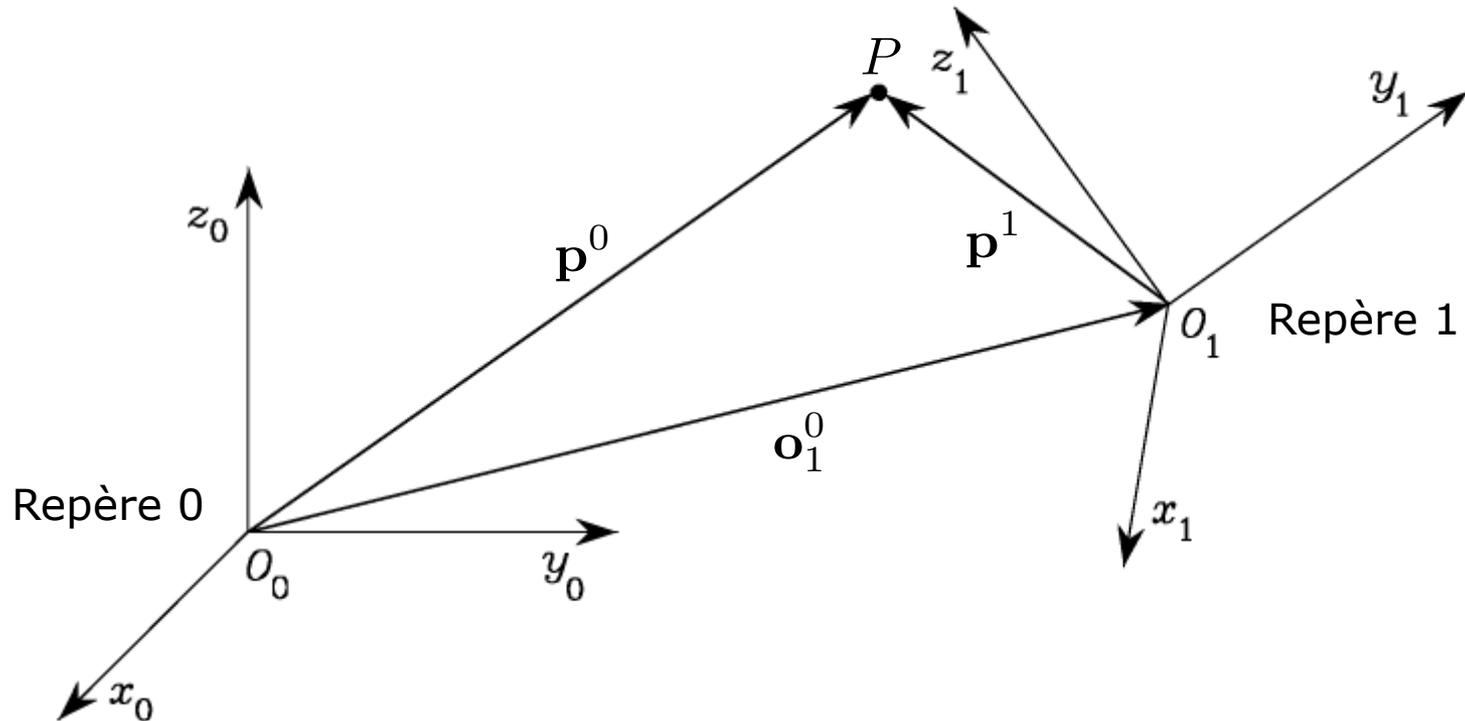
# Matrices homogènes



Soit:

- $P$  : point générique dans l'espace 3D
- $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1$  : coordonnées du point  $P$  par rapport au repère 0 et 1
- $\mathbf{o}_1^0$  : vecteur qui décrit l'origine du repère 1 par rapport au repère 0
- $\mathbf{R}_1^0$  : matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0

# Matrices homogènes

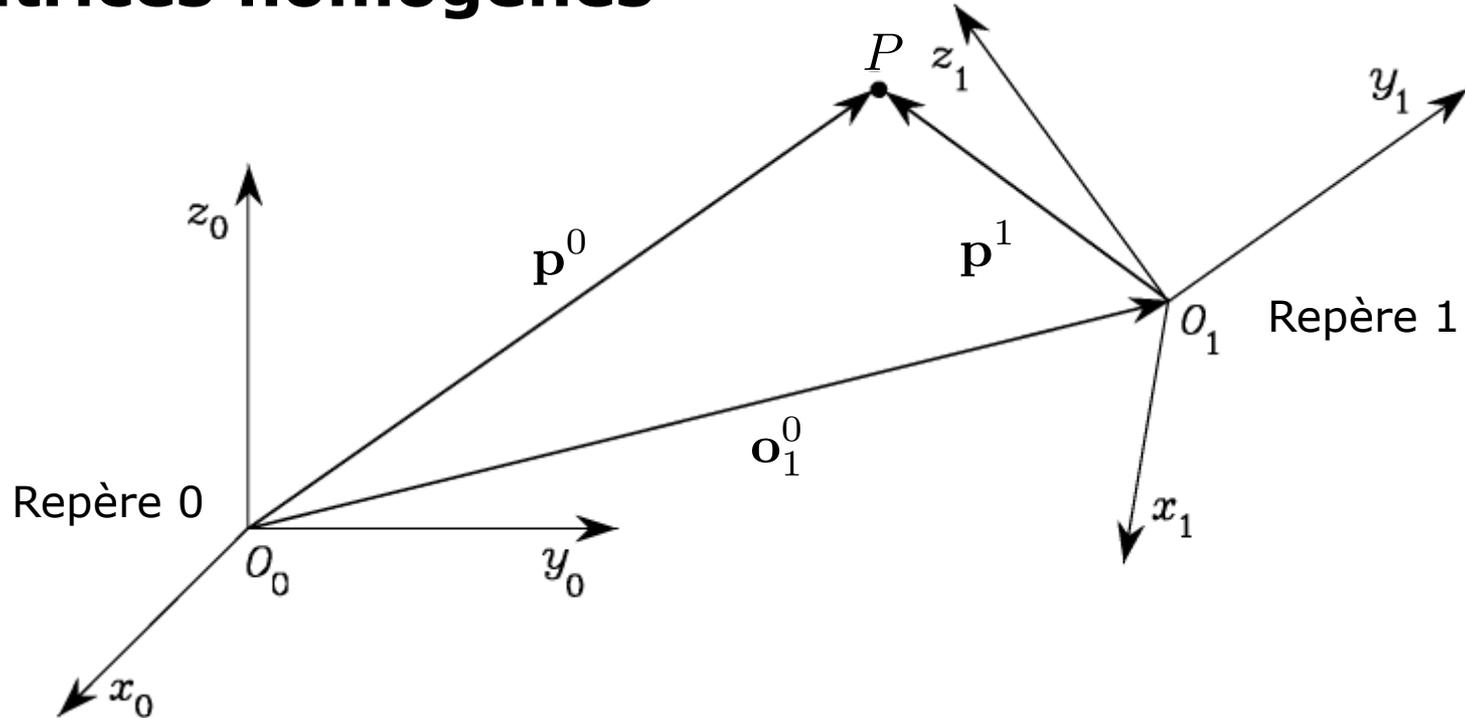


- On peut écrire la position du point  $P$  par rapport au repère 0 comme suit :

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

*Transformation de coordonnées*  
(translation + rotation) d'un vecteur  
entre le repère 0 et le repère 1

# Matrices homogènes



- Pour avoir une *représentation compacte* de la relation entre les coordonnées du même point  $P$  dans les deux repères, nous pouvons introduire la **représentation homogène** d'un vecteur générique  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  :

$\mathbf{p}$  "tilde"  $\rightarrow \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$   $\leftarrow$  On rajoute une 4<sup>e</sup> coordonnée au vecteur, dont la valeur est 1

# Matrices homogènes

- Si on utilise cette représentation pour les vecteurs  $\mathbf{p}^0$  et  $\mathbf{p}^1$ , on peut écrire la transformation de coordonnées en utilisant *une seule matrice*  $4 \times 4$  :

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Matrice\ de} \\ \mathbf{transformation} \\ \mathbf{homogène} \end{array}$$

- La **pose** du repère 1 par rapport au repère 0 est définie par le couple :

$$(\mathbf{o}_1^0, \mathbf{R}_1^0)$$

- La pose est définie par 6 *paramètres* :
  - 3 définissant la *translation*
  - 3 définissant la *rotation*

# Matrices homogènes

- La transformation d'un vecteur du repère 1 au repère 0 est exprimée par une seule matrice qui contient la matrice de rotation du repère 1 par rapport au repère 0 et le vecteur de translation de l'origine du repère 0 à l'origine du repère 1 :

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

- La **transformation inverse** entre le repère 0 et 1 est décrite par la matrice  $\mathbf{A}_0^1$  qui satisfait l'équation :

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0$$

- En utilisant les propriétés des matrices partitionnées, on trouve que :

$$(\mathbf{A}_1^0)^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1^0)^T & -(\mathbf{R}_1^0)^T \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

# Matrices homogènes

**Attention:** les matrices homogènes ne satisfont pas la *propriété d'orthogonalité*. Par conséquent, en général:

$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$$

## En conclusion:

- Une matrice homogène permet d'exprimer la transformation de coordonnées entre deux repères *sous forme compacte*
- Si les repères ont la *même origine*, la matrice homogène se réduit à la *matrice de rotation* ( $4 \times 4$ ) définie précédemment
- Comme pour les matrices de rotation, on peut *composer* une séquence de transformations de coordonnées grâce au produit matriciel:

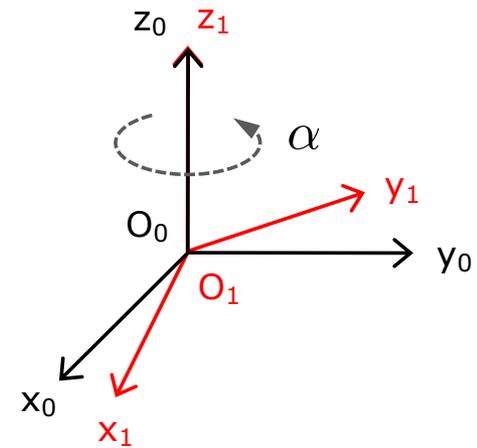
$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \cdots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

où  $\mathbf{A}_i^{i-1}$  est la matrice de transformation qui met en relation la description d'un point dans le repère  $i$  avec la description du même point dans le repère  $i - 1$

# Matrices homogènes

**Exemple 1** (Rotation simple autour de l'axe  $z$ ) :

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\alpha) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$



**Exemple 2** (Translation simple) :

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

