

Localisation et navigation de robots

UPJV, Département EEA

M2 3EA, EC32, parcours RoVA

Année Universitaire 2025-2026

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

**Mercredi et Jeudi 9h30-12h00,
salle CURI 8 ou 305 : CM & TD
Jeudi, salle TP204 : TP**



Plan du cours

Chapitre 1: Localisation

- 1.1 Introduction et défis
- 1.2 Odométrie
- 1.3 Localisation par filtre de Kalman
- 1.4 Autres techniques de localisation

Chapitre 2: Navigation

- 2.1 Stratégies de navigation
- 2.2 Architectures de contrôle
- 2.3 Navigation vers un but
- 2.4 Planification de trajectoire et évitement d'obstacles

Plan du chapitre

- Introduction et défis

Partie 1

- Odométrie

Partie 2

- Localisation par filtre de Kalman

Partie 3

- Autres techniques de localisation

Partie 4

Partie 3 : Localisation par filtre de Kalman

- Notions de base de théorie des probabilités
- Généralités sur le filtre de Kalman
- Filtre de Kalman étendu (EKF)
- Classification des problèmes de localisation
- Localisation incrémentielle avec le filtre de Kalman

Notions de base de théorie des probabilités

Soit X une **variable aléatoire** (v.a.) et x une valeur spécifique (ou réalisation) qu'elle peut prendre.

$\Pr(X = x)$: probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x

Exemples :

1. Le résultat d'un lancé de dé est caractérisé par (6 valeurs possibles) :

$$\Pr(X = 1) = \Pr(X = 2) = \dots = \Pr(X = 6) = \frac{1}{6}$$



2. Pièce de monnaie équilibrée lancée en l'air (2 valeurs possibles, « pile » ou « face ») :

$$\Pr(X = \text{“pile”}) = \Pr(X = \text{“face”}) = \frac{1}{2}$$



Notions de base de théorie des probabilités

Dans un **espace continu**, les v.a. peuvent prendre un continuum de valeurs

- Dans ce cas, on introduit la notion de *fonction de densité de probabilité* $p(x) = p_X(x)$ (abréviation « pdf »: *probability density function*). Une v.a. continue X a une pdf $p(x)$ si :

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx$$

- On peut obtenir la pdf d'une v.a. continue en calculant la dérivée de la *fonction de répartition* $P(x) = P_X(x) \triangleq \Pr(X \leq x)$ de la v.a. (abréviation « cdf »: *cumulative distribution function*), à savoir :

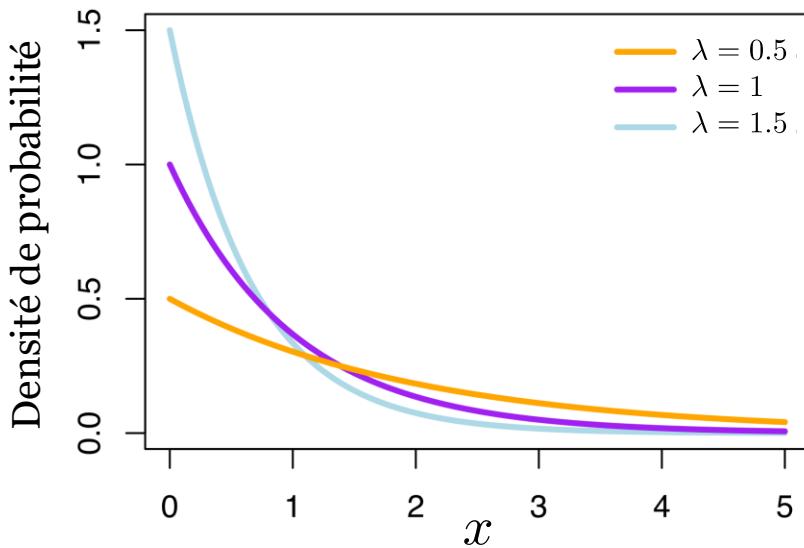
$$p(x) = \frac{d}{dx} P(x)$$

La cdf d'une variable aléatoire réelle est toujours croissante, continue à droite, avec une limite nulle en $-\infty$ et une limite qui vaut 1 en $+\infty$

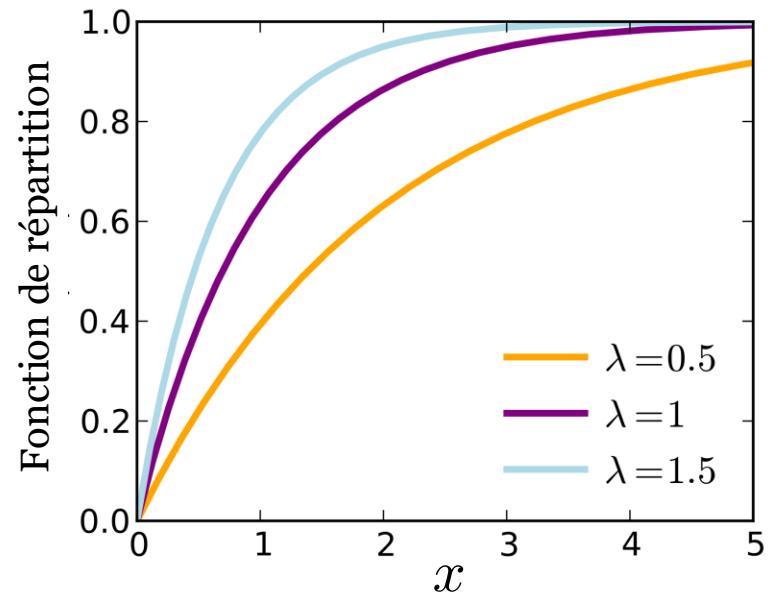
Notions de base de théorie des probabilités

Exemple (loi exponentielle) :

- Support : $[0, \infty)$
- Paramètre : $\lambda > 0$ (intensité)



$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$P(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

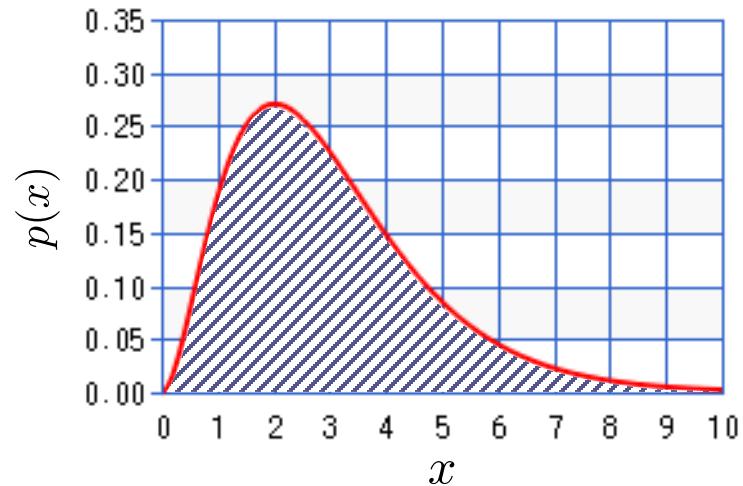
Notions de base de théorie des probabilités

Propriétés d'une pdf :

1. Nous avons que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

à savoir, l'aire sous une pdf est 1



2. Les pdf sont des fonctions *non négatives*, c'est-à-dire :

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Notions de base de théorie des probabilités

Étant donnée un v.a. X avec une pdf $p(x)$, on peut définir les quantités suivantes :

- *Espérance* de la v.a. X : $\mathbb{E}[X] = \mu \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$
- *Variance* de la v.a. X : $\mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \text{var}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$
- *Moment centré d'ordre* $n \geq 1$ de la v.a. X : $\mathbb{E}[(X - \mu)^n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^n p(x) dx$

Exemple :

Soit X une v.a. qui suit la loi exponentielle. Alors, nous avons que :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \mathbb{E}[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}, \quad n \in \{1, 2, \dots\}$$

Notions de base de théorie des probabilités

Variables aléatoires multivariées

- La pdf d'une v.a. vectorielle m -dimensionnelle $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T$ est une pdf *conjointe* des m éléments :

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Cette pdf est une *fonction scalaire* d'une variable vectorielle. Elle est non négative et elle a la propriété :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m = 1$$

- Espérance* de la v.a. \mathbf{X} :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \mathbb{E}[X_2] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_m] \end{bmatrix}$$

Notions de base de théorie des probabilités

- *Matrice de covariance* de la v.a. \mathbf{X} :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = \text{var}[\mathbf{X}] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Remarques :

- La matrice $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est *symétrique* ($\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T$) et *semi-définie positive* ($\boldsymbol{\Sigma} \succeq \mathbf{0}$)
- La matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ contient les *variances* de X_i sur la diagonale principale et les *covariances croisées* de X_i et X_j , $i \neq j$ sur les éléments hors diagonale

Exemple (matrice de covariance 3×3) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)^2] & \mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] & \mathbb{E}[(X_1 - \mu_1)(X_3 - \mu_3)] \\ \mathbb{E}[(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1)] & \mathbb{E}[(X_2 - \mu_2)^2] & \mathbb{E}[(X_3 - \mu_3)(X_1 - \mu_1)] \\ \mathbb{E}[(X_3 - \mu_3)(X_1 - \mu_1)] & \mathbb{E}[(X_3 - \mu_3)(X_2 - \mu_2)] & \mathbb{E}[(X_3 - \mu_3)^2] \end{bmatrix}$$

Notions de base de théorie des probabilités

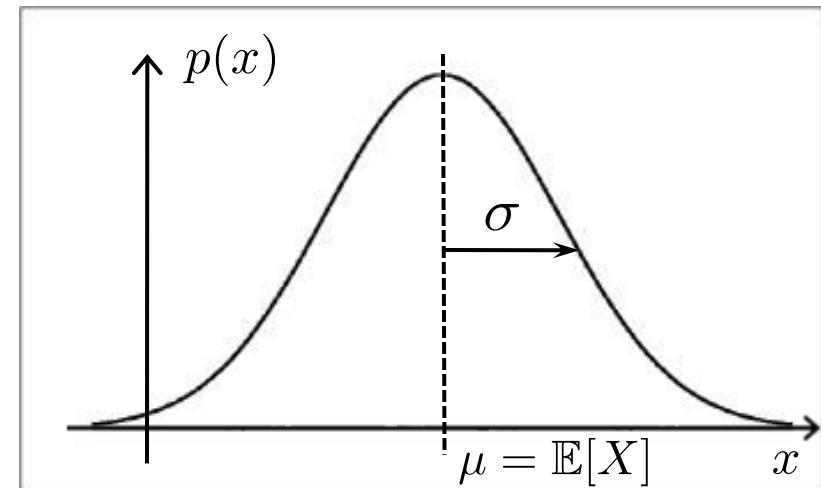
1) La **loi gaussienne** (ou **normale**) est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Sa pdf dépend de deux paramètres, son *espérance*, un nombre réel noté μ , et son *écart type*, un nombre réel positif, noté σ :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Lorsque une v.a. X suit la loi gaussienne, il est courant d'utiliser la notation suivante :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

↑ ↑
moyenne variance



Remarque:

Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$,
la loi gaussienne est appelée
standard (ou *centrée réduite*)

Notions de base de théorie des probabilités

Si la v.a. \mathbf{X} est m -dimensionnelle, la **loi gaussienne multivariée** est caractérisée par la pdf :

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

avec

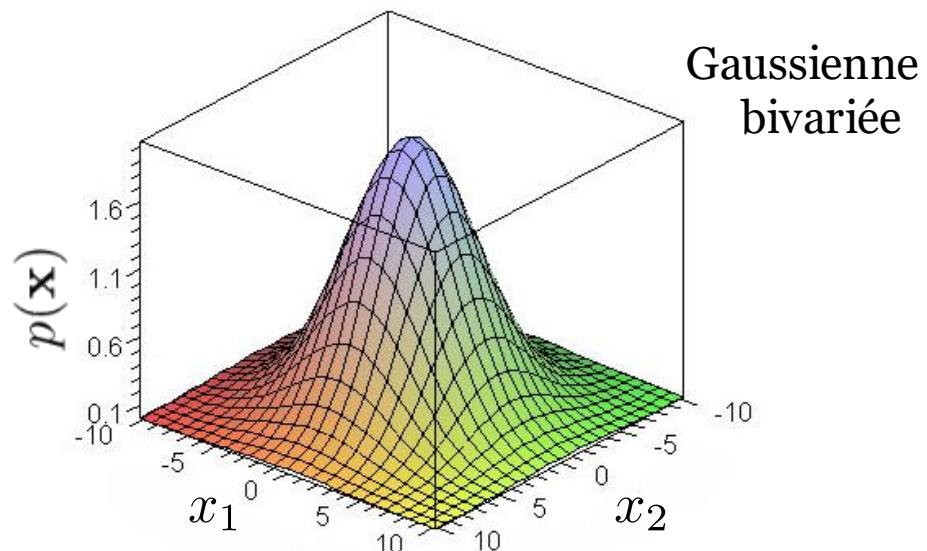
$\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$: moyenne

$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: matrice de covariance
(définie positive)

On écrira alors : $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

Commande Matlab :

`randn(m, n)` retourne une matrice $m \times n$ qui contient des valeurs pseudo-aléatoires tirées d'une loi gaussienne standard



Notions de base de théorie des probabilités

2) Loi uniforme

La densité de probabilité de la loi uniforme est une *function porte* sur l'intervalle $[a, b]$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si X est une v.a. uniforme, on écrit $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

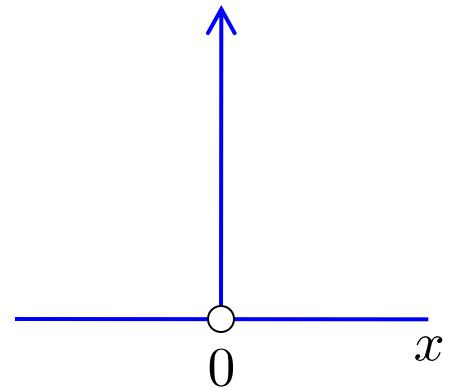
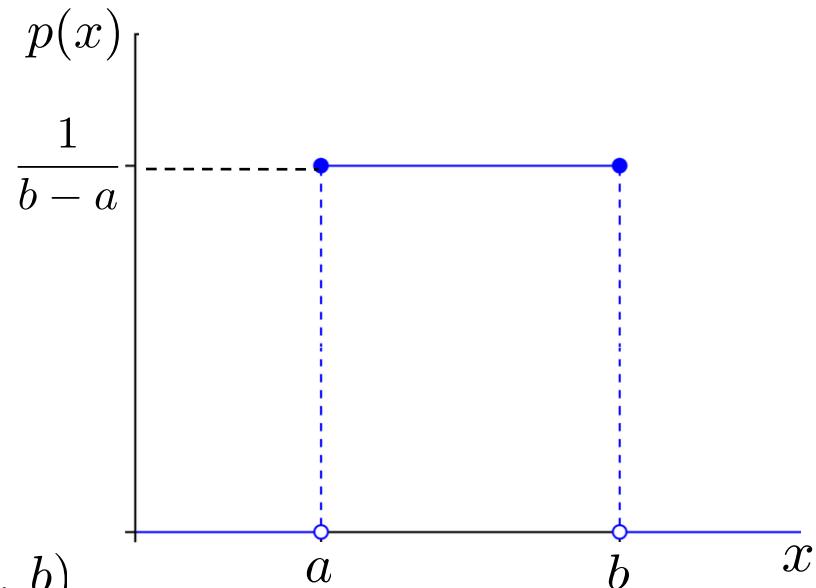
Commande Matlab : `rand(m, n)`

3) Distribution de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

avec la contrainte :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$



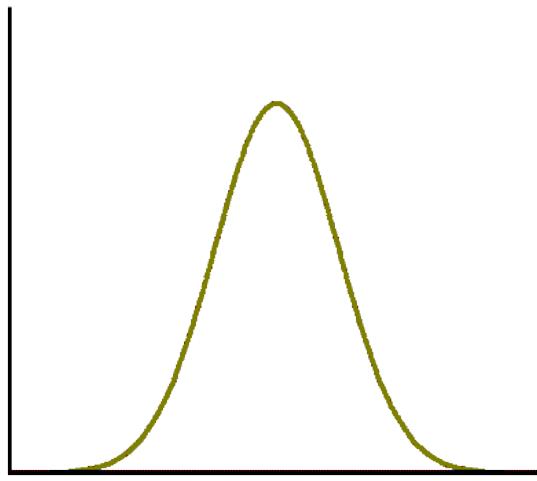
Notions de base de théorie des probabilités

Pdf unimodale : un seul mode ou « un seul maximum »

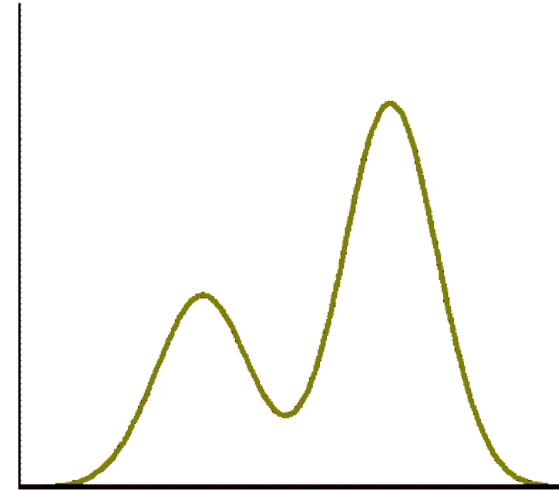
Exemples : loi gaussienne, de Laplace, de Cauchy, de Student, exponentielle, du χ^2 (chi carré)

Pdf multimodale : « plusieurs maxima »

Exemple: mélange de 2 gaussiennes, $\alpha \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \alpha) \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\alpha \in [0, 1]$



Pdf unimodale



Pdf bimodale

Notions de base de théorie des probabilités

Densité de probabilité conjointe

La pdf conjointe de deux variables aléatoires X et Y est donnée par $p(x, y)$

Elle décrit la probabilité que la v.a. X prend la valeur x **et** que Y prend la valeur y

Si les v.a. X et Y sont *indépendantes*, nous avons que :

$$p(x, y) = p(x) p(y)$$

Densité de probabilité conditionnelle

La densité de probabilité conditionnelle décrit la probabilité que la v.a. X prend la valeur x *sous la condition* que sûrement la v.a. Y prend la valeur y .

La densité de probabilité conditionnelle est indiquée $p(x | y)$. Si $p(y) > 0$ elle est définie comme suit :

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

Notions de base de théorie des probabilités

Si les v.a. X et Y sont *indépendantes* :

$$p(x | y) = \frac{p(x) \cancel{p(y)}}{\cancel{p(y)}} = p(x)$$

à savoir, la connaissance de Y n'apporte aucune information utile sur la valeur de X

Théorème des probabilités totales

Le théorème des probabilités totales tire son origine des axiomes de théorie des probabilités et il établit que :

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x | y) p(y) dy$$

On dit alors que la v.a. Y a été *marginalisée*

Notions de base de théorie des probabilités

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes met en relation la densité de probabilité conditionnelle $p(x | y)$ avec son inverse $p(y | x)$

Sous l'hypothèse que $p(y) > 0$, on peut écrire le théorème de Bayes comme suit :

$$p(x | y) = \frac{p(y | x) p(x)}{p(y)}$$



T. Bayes (1701-1761)

Remarque : La version originale du théorème était pour des probabilités (v.a. discrètes). La version énoncée ci-dessus est pour des *fonctions de densité de probabilité* (pdf)

Notions de base de théorie des probabilités

Fonction de v.a. gaussiennes multivariées

Soient deux v.a. multivariées *indépendantes et gaussiennes*

$$\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1), \quad \mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$$

et la fonction des deux v.a. suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$$

Problème : Quelle est la *moyenne* et la *matrice de covariance* de la v.a. \mathbf{Y} ?

- Si la fonction est *linéare*, c'est-à-dire $\mathbf{f}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{B}\mathbf{X}_2$ (\mathbf{A}, \mathbf{B} matrices constantes connues), la v.a. \mathbf{Y} est aussi *gaussienne*, et (comme simple conséquence du théorème des probabilités totales) nous avons que :

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_1\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}_2\mathbf{B}^T)$$

Notions de base de théorie des probabilités

- Si $f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ est *non linéare*, **Y n'est pas gaussienne**, en général !

Cependant, si \mathbf{f} est différentiable on peut considérer une approximation au 1^{er} ordre de $f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ au point (μ_1, μ_2) :

$$\mathbf{Y} \simeq \mathbf{f}(\mu_1, \mu_2) + \mathbf{F}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{X}_1 - \mu_1) + \mathbf{F}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{X}_2 - \mu_2)$$

avec

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}_1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_1} \right|_{\mu_1, \mu_2} \text{ et } \mathbf{F}_{\mathbf{x}_2} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_2} \right|_{\mu_1, \mu_2} \quad (\text{matrices jacobienes de } \mathbf{f} \text{ évaluées en } \mu_1, \mu_2)$$

La *moyenne* et la *matrice de covariance* de \mathbf{Y} sont alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{Y}] \simeq \mathbf{f}(\mu_1, \mu_2)$$

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])(\mathbf{Y} - \mathbb{E}[\mathbf{Y}])^T] \simeq \mathbf{F}_{\mathbf{x}_1} \Sigma_1 \mathbf{F}_{\mathbf{x}_1}^T + \mathbf{F}_{\mathbf{x}_2} \Sigma_2 \mathbf{F}_{\mathbf{x}_2}^T$$

Notions de base de théorie des probabilités

Définition :

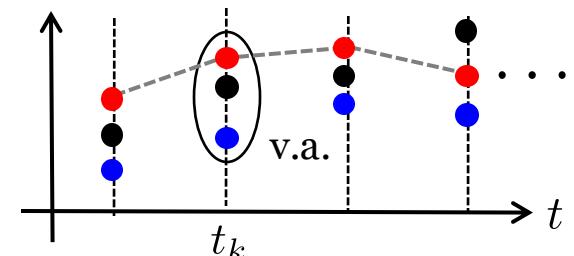
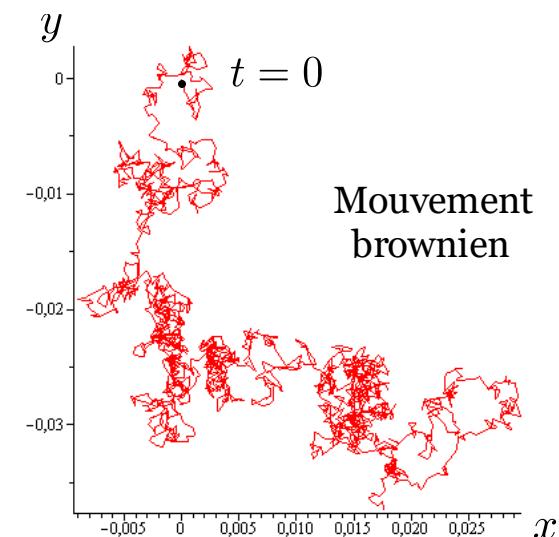
On définit un **processus stochastique** comme une famille de variables aléatoires $X(t)$, associées à toutes les valeurs $t \in T$. L'ensemble des observations $x(t)$ disponibles, constitue une réalisation du processus

- Si l'ensemble T est indénombrable, on parle de *processus continu* (par ex. le mouvement brownien d'une particule)
- Si l'ensemble T est dénombrable, on parle de *processus discret* ou de *série temporelle*

Remarque :

Un *processus stochastique (ou aléatoire)* représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire

En d'autres termes, il est une **v.a.** indexée dans le temps



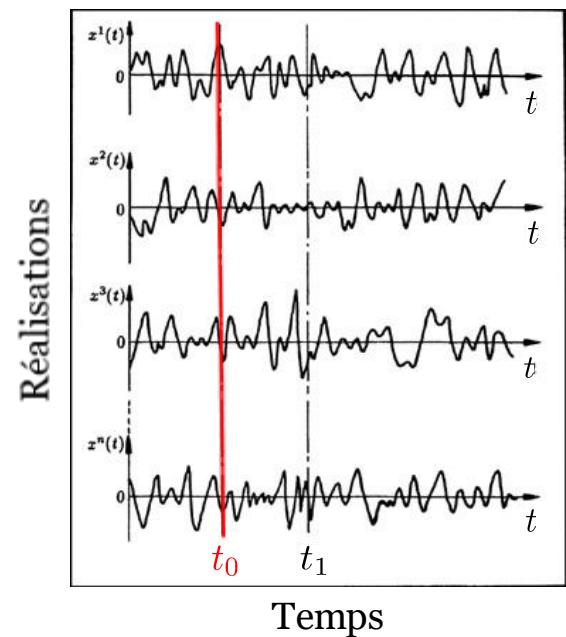
Notions de base de théorie des probabilités

Définition :

Un processus stochastique est dit **stationnaire** si l'ensemble des statistiques *ne varie pas dans le temps* (ou plus précisément, si ses propriétés statistiques caractérisées par des espérances mathématiques sont indépendantes du temps)

- Un processus stochastique est un ensemble $X(t)$ de fonctions ordinaires $x(t)$, chacune d'elles étant une réalisation du processus. On peut caractériser ce processus en lui associant à chaque instant t_0 une densité de probabilité $p_X(x, t_0)$
- À la densité de probabilité $p_X(x, t_0)$, on peut associer à son tour les moments appelés *moyennes d'ensemble* :

$$\mathbb{E}[X^n(t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x, t_0) dx$$



Si ces moyennes d'ensemble, et par conséquent la densité de probabilité, ne dépendent pas de l'instant t_0 , on parle de *processus stationnaire*

Partie 3 : Localisation par filtre de Kalman

- Notions de base de théorie des probabilités
- Généralités sur le filtre de Kalman
- Filtre de Kalman étendu (EKF)
- Classification des problèmes de localisation
- Localisation incrémentielle avec le filtre de Kalman

Le filtre de Kalman

- Le *filtre de Kalman* est couramment utilisé en automatique, robotique et traitement du signal, mais aussi en finance, météorologie, océanographie, sciences des transports, etc.
- Une grande variété d'estimateurs inspirés par le filtre de Kalman a été développée à partir de la formulation originale pour les *systèmes linéaires à temps discret* (Kalman, 1960) :
 - *Filtre de Kalman étendu*, « extended Kalman filter » ou EKF (Schmidt, 1966)
 - *Filtre de Kalman à temps continu* (Kalman & Bucy, 1968)
 - *Filtre de Kalman non parfumé*, « unscented Kalman filter » ou UKF (Julier & Uhlmann, 2004)



R.E. Kalman
(1930 - 2016)
avec la National
Medal of Science
en 2009

Filtre de Kalman linéaire

- Soit le système dynamique *linéaire* à temps discret, $k \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \text{Équation} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \\
 \text{d'état}
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{r}_k \quad \text{Entrée de commande (connue)} \\
 \text{Équation} \quad \longrightarrow \quad \text{de mesure}
 \end{array}
 \end{array}$$

- Le **bruit de modèle** \mathbf{w}_{k-1} et le **bruit de mesure** \mathbf{r}_k sont supposés *blancs* (sans mémoire), à *moyenne zéro*, et *gaussiens* avec matrices de covariance \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k , respectivement. Les bruits de modèle et de mesure sont aussi supposés *non corrélés*. En résumé, nous avons que :

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_k] = \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{0}, \quad j \neq k$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_k \mathbf{r}_j^T] = \mathbf{0}, \quad j \neq k$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T] = \mathbf{R}_k$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{0}, \quad \forall j, k$$

Filtre de Kalman linéaire

- Le filtre de Kalman linéaire à temps discret est un *estimateur récursif*
 - Pour estimer l'*état courant* \mathbf{x}_k , on a besoin *seulement* de connaître l'estimé de l'état précédent et les mesures courantes : l'historique des mesures et des estimés n'est pas nécessaire
- L'« état » du filtre est représenté par *deux variables* :
 1. $\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}$: estimé de l'état du système \mathbf{x}_k à l'instant k , en utilisant l'information jusqu'à l'instant k
 2. $\mathbf{P}_{k|k} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \widehat{\mathbf{x}}_{k|k})^T]$: matrice de covariance de l'erreur d'estimation de l'état à l'instant k , en utilisant l'information jusqu'à l'instant k

$\underbrace{\widehat{\mathbf{x}}_{k|k}}$
 $\widetilde{\mathbf{x}}_{k|k}$
 Erreur d'estimation
 de l'état \mathbf{x}_k du système

Filtre de Kalman linéaire

Initialisation du filtre :

$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0]$ où $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du système

$\mathbf{P}_{0|0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Pour $k \in \{1, 2, \dots\}$:

Phase de prédition :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Filtre de Kalman linéaire

Phase de correction :

$$\widehat{\mathbf{x}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \underbrace{\mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1})}_{\text{Innovation } \mathbf{v}_k}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

avec

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad \begin{array}{l} \text{Gain de Kalman} \\ (\text{Remarque : ce gain peut} \\ \text{être calculé hors ligne}) \end{array}$$

$\mathbf{P}_{k|k-1}$: matrice d'estimation *a priori* de la covariance de l'erreur

$\mathbf{P}_{k|k}$: matrice d'estimation *a posteriori* de la covariance de l'erreur

Innovation $\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \widehat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$: partie de la mesure qui contient de *nouvelles informations* sur l'état. L'innovation (ou résidu de la mesure) est un processus stochastique *blanc* avec *moyenne zéro* et covariance $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$

Propriétés du filtre de Kalman

« Problème E »

Trouver l'estimateur qui minimise (à chaque instant de temps k) l'espérance de la norme pondérée de l'erreur d'estimation $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$, à savoir:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}_k} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{S}_k \tilde{\mathbf{x}}_k]$$

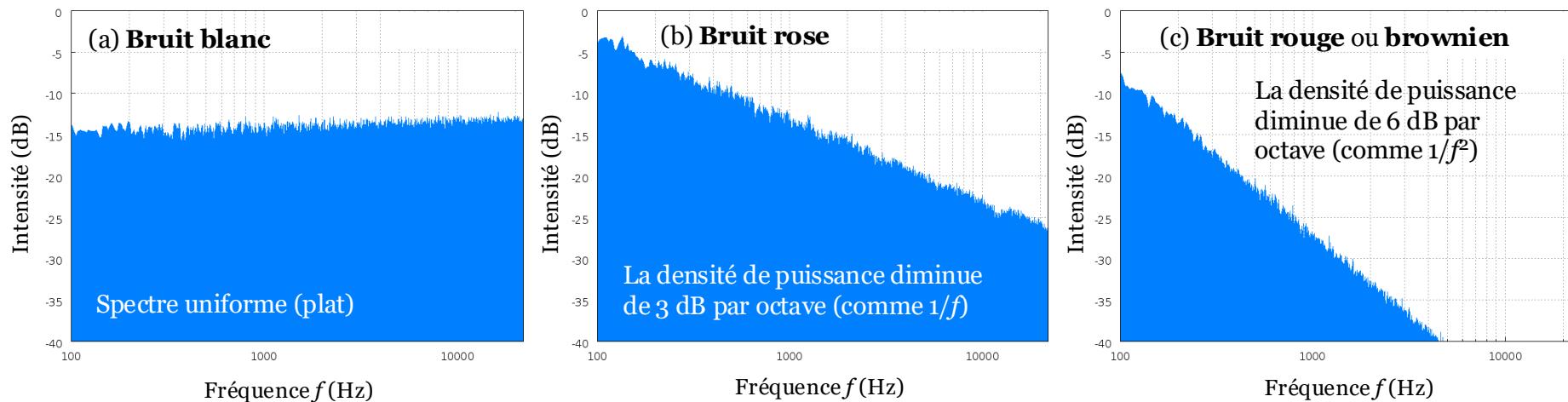
où \mathbf{S}_k est une matrice de pondération définie positive

- Si le bruit de modèle et de mesure sont gaussiens, blancs, à moyenne zéro, et non corrélés, le filtre de Kalman est **la solution** du Problème E
- Si le bruit de modèle et de mesure sont blancs, à moyenne zéro et non corrélés, le filtre de Kalman est la meilleure **solution linéaire** du Problème E
 - Il peut exister un estimateur *non linéaire* qui donne une meilleure solution, mais le filtre de Kalman est le meilleur estimateur linéaire
 - Donc, même si le bruit n'est pas gaussien, le filtre de Kalman reste toujours le filtre optimal *linéaire* (l'estimateur linéaire à erreur quadratique moyenne minimale ou **linear MMSE estimator**, en anglais)

Propriétés du filtre de Kalman

- Si le bruit de modèle et de mesure sont **corrélés** ($\exists j, k : \mathbb{E}[\mathbf{r}_k \mathbf{w}_j^T] \neq \mathbf{0}$) ou **colorés** (c'est-à-dire, avec mémoire), on peut adapter la formulation du filtre de Kalman linéaire pour résoudre le Problème E

Exemples de densité spectrale de puissance d'un bruit



- Pour les **systèmes dynamiques non linéaires**, plusieurs formulations de filtres de Kalman non linéaires se rapprochent de la solution du Problème E (par ex. l'EKF et l'UKF)

Problème : *toute forme d'optimalité est perdue !*

Partie 3 : Localisation par filtre de Kalman

- Notions de base de théorie des probabilités
- Généralités sur le filtre de Kalman
- Filtre de Kalman étendu (EKF)
- Classification des problèmes de localisation
- Localisation incrémentielle avec le filtre de Kalman

Filtre de Kalman étendu (EKF)

- Soit le système dynamique *non linéaire* à temps discret, $k \in \{1, 2, \dots\}$:

$$\begin{array}{l}
 \text{Équation} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\
 \text{d'état} \\
 \\
 \text{Équation} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k \quad \text{Entrée de commande (*connue*)} \\
 \text{de mesure}
 \end{array}$$

où $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ et $\mathbf{h}(\cdot)$ sont deux fonctions différentiables arbitraires

- Comme pour le filtre de Kalman linéaire :

Le **bruit de modèle** \mathbf{w}_{k-1} et le **bruit de mesure** \mathbf{r}_k sont supposés *blancs* (sans mémoire), à *moyenne zéro*, et *gaussiens* avec matrices de covariance \mathbf{Q}_k et \mathbf{R}_k , respectivement. Les bruits de modèle et de mesure sont aussi supposés *non corrélés*

Filtre de Kalman étendu (EKF)

Initialisation du filtre :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0] \text{ où } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ est l'état initial du système}$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T]$$

Pour $k \in \{1, 2, \dots\}$:

Phase de prédition :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

avec

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{k-1})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}}$$

- Matrice jacobienne de la fonction \mathbf{f}
- On a considéré ici le développement en série de Taylor à l'ordre 1 de \mathbf{f} en $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$

Filtre de Kalman étendu (EKF)

Phase de correction :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1}$$

avec

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad \text{Gain de Kalman}$$

et

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

- Matrice jacobienne de la fonction \mathbf{h}
- On a considéré ici le développement en série de Taylor à l'ordre 1 de \mathbf{h} en $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$

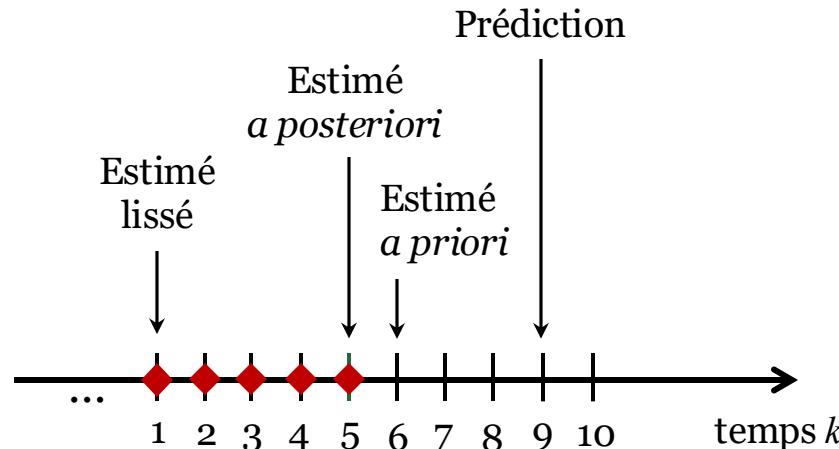
Filtre de Kalman non parfumé (UKF)

- L'UKF est plus précis que l'EKF avec des systèmes *fortement non linéaires*
- L'UKF utilise une technique d'échantillonnage *déterministe* (la transformation *non parfumée*) pour choisir un nombre minimal de points échantillons (points « sigma ») autour de la moyenne. Ces points sont propagés à travers les équations non linéaires du système dont on récupère la moyenne et la covariance
- L'UKF n'a pas besoin du calcul explicite des *matrices jacobienes* comme l'EKF

Pour d'autres propriétés et d'autres variantes du filtre de Kalman (*filtre d'information*, *filtre H_∞* , *filtre adaptative*, *filtre de Kalman d'ensemble* ou EnKF, problèmes de *prédiction* et de *smoothing*, etc.), voir les livres :

- “*Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*”, D. Simon, John Wiley & Sons, 2006, Partie II et IV
- “*Optimal Control and Estimation*”, R.F. Stengel, Dover Publications, 1994, Ch. 4

Horizon temporel et estimation



Dans l'exemple en figure, on suppose d'avoir reçu des *mesures* (losanges rouges) jusqu'à l'instant $k = 5$ (temps présent) inclus :

- Un estimé de l'état à $k < 5$, s'appelle **estimé lissé** (« *smoothed estimate* »)
- Un estimé de l'état à $k = 5$, s'appelle **estimé *a posteriori***
- Un estimé de l'état à $k = 6$, s'appelle **estimé *a priori***
- Un estimé de l'état à $k > 6$, s'appelle **prédition**

} Cf. filtre de Kalman

“*Optimal State Estimation: Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches*”, D. Simon, John Wiley & Sons, 2006 (Sect. 5.1, page 126)

Partie 3 : Localisation par filtre de Kalman

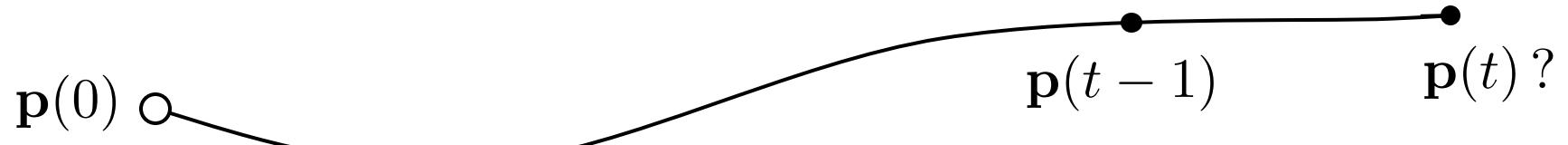
- Notions de base de théorie des probabilités
- Généralités sur le filtre de Kalman
- Filtre de Kalman étendu (EKF)
- Classification des problèmes de localisation
- Localisation incrémentielle avec le filtre de Kalman

Classification des problèmes de localisation

- Dans toute *localisation probabiliste basée carte*, la « **croyance** » sur l'état du robot (*belief state*, en anglais) est représentée par une *pdf*

1 – Problème de localisation incrémentielle

- On assume que la pose initiale $p(0)$ du robot soit connue et que l'incertitude associée soit “*petite*”
- La pose courante du robot, $p(t)$, est mise à jour en utilisant la connaissance de la pose précédente (“*suivi ou tracking de pose*”)
- La croyance sur l'état du robot est typiquement modelisée avec une *pdf unimodale*, comme par ex. une pdf gaussienne



Classification des problèmes de localisation

2 – Problème de localisation globale

- On assume que la pose initiale du robot ne soit pas connue. Ça veut dire que le robot peut être placé partout dans l'environnement et il doit se localiser
- La croyance initiale sur l'état du robot est typiquement une *pdf uniforme*

~~$p(0)$~~

•
 $p(t) ?$

3 – Problème du robot kidnappé

- Le robot est kidnappé et déplacé en un autre endroit
- Ce problème est similaire au problème de localisation globale seulement si le robot se rend compte d'être été kidnappé



Localisation de Markov (resolution des problèmes 1, 2 et 3)

- La croyance sur l'état du robot peut être représentée par une *pdf arbitraire*
- Localisation à partir de *toute position initiale inconnue*
- *Approche recursive* : phase de *prédition* et de *correction*
- On peut sortir de *situations ambiguës* (en effet, plusieurs positions possibles du robot sont “suivies” en même temps)
- Pour mettre à jour la probabilité de toutes les positions dans tout l'espace des états à chaque instant, on a besoin d'une *représentation discrète* de l'espace (par ex. une grille avec cellules de taille fixe ou un graphe topologique)
- Puissance de calcul et mémoire requise *importantes* (par consequent, la résolution et la taille de la carte sont limitées)

Réduction de la complexité de calcul par **échantillonnage aléatoire** (*random sampling*, en anglais):

- La croyance sur l'état est *approchée* (on représente que un sous-ensemble des positions possibles du robot)
- *Algorithmes de condensation* ou *Monte Carlo*

Localisation par filtre de Kalman (resolution du problème 1)

- La position initiale du robot est *connue*
- La croyance sur l'état du robot est représentée par une seule *pdf gaussienne*. Il donc suffit de mettre à jour à chaque itération les paramètres de la gaussienne (c'est-à-dire, la *moyenne* et la *matrice de covariance*)
- Localisation *precise* et *efficace*
- Utilisable avec une *représentation continue* de l'environnement
- Si l'incertitude sur la position du robot devient trop importante (par ex. suite à la collision avec un obstacle) et la pdf n'est *plus vraiment unimodale*, le filtre de Kalman peut n'être pas capable de capturer la multitude de positions possibles du robot et il peut échouer (par conséquent, le robot sera perdu à jamais)

Remarque :

On peut montrer que la localisation de Markov se réduit à la localisation par filtre de Kalman si on représente la croyance sur l'état du robot avec une *pdf gaussienne*

Partie 3 : Localisation par filtre de Kalman

- Notions de base de théorie des probabilités
- Généralités sur le filtre de Kalman
- Filtre de Kalman étendu (EKF)
- Classification des problèmes de localisation
- Localisation incrémentielle avec le filtre de Kalman

Localisation incrémentielle

- *Hypothèse* : position initiale connue précisément
- Le robot mobile se déplace : l'odométrie permet de *mesurer* son mouvement
 - *Perception proprioceptive* : croissance permanente de l'incertitude de localisation
 - Pour borner cette incertitude :
 1. Localisation par rapport à une *carte* (« M »)
 2. Observation de l'environnement (*perception extéroceptive*)
 - Laser, capteur à ultrasons, caméra, etc.

Localisation incrémentielle

- Localisation consistante =
odométrie + observations extéroceptives

- Comment les combiner ?

Deux étapes :

1. Prédiction
2. Correction

Localisation incrémentielle

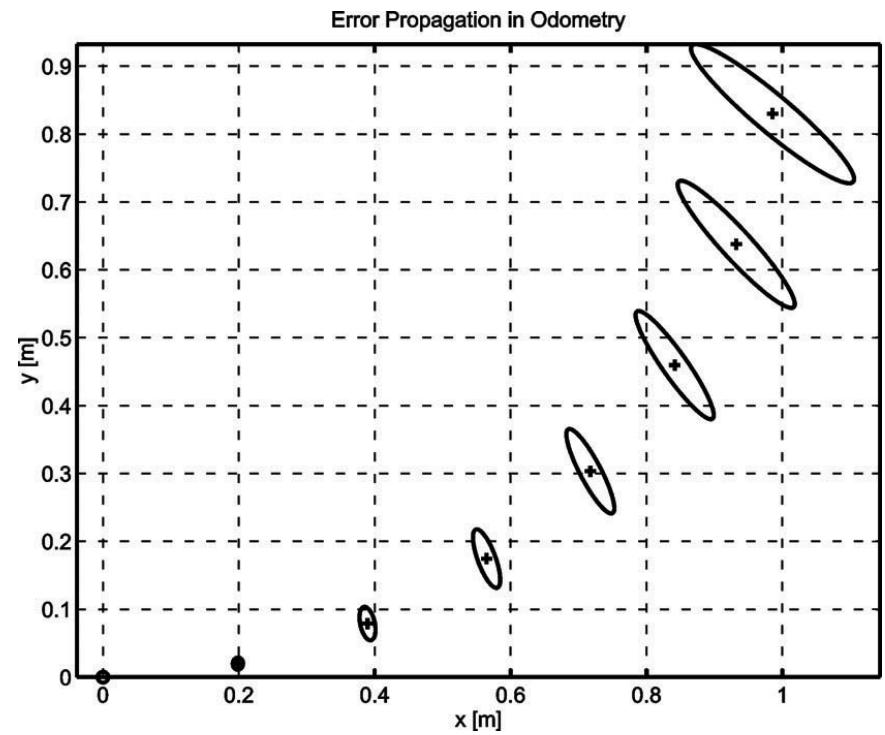
1. La prédiction

- Pose estimée par les capteurs proprioceptifs

- Dans notre cas:
 - Les encodeurs des roues (odométrie)

$$\mathbf{p}' = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \Delta s_d, \Delta s_g)$$

- L'incertitude sur la position du robot croît strictement au cours du temps



Localisation incrémentielle

2. La correction

- Utilisation des *mesures* ou *perceptions extéroceptives*
- On corrige la pose estimée par la prédiction
- L'incertitude se réduit

Exemple:

- Télémètre laser pour mesurer la distance d'un mur
- Correction suivant la position estimée dans la phase de prédiction

Localisation par filtre de Kalman (KF)

- Localisation robuste
 - Fusion de capteurs hétérogènes (« filtre de fusion de capteurs »)
- Localisation « optimale »
 - Procédure *récursive* adaptée au problème de *localisation incrémentielle*
 - Exploitation maximale de l'information disponible

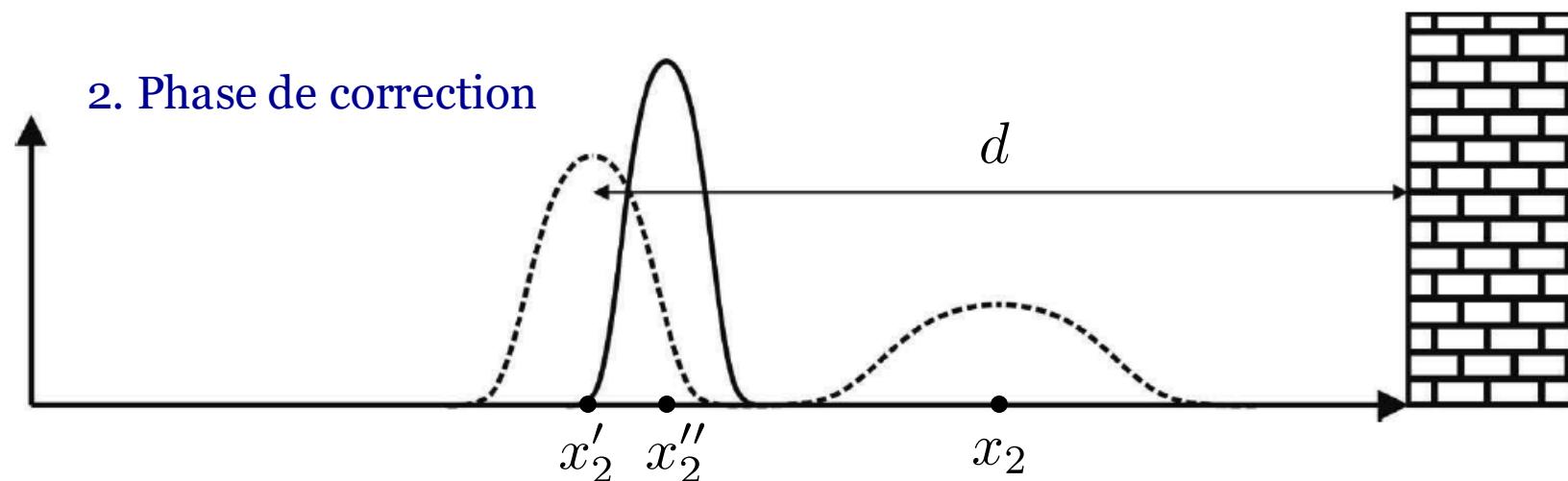
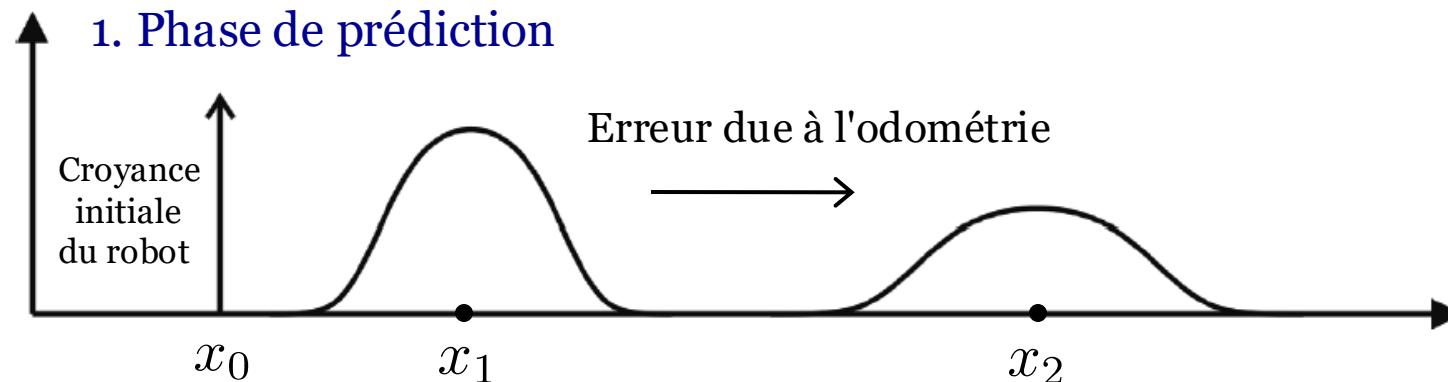
Localisation par filtre de Kalman (KF)

- Si on utilise le KF *standard* :
 - Le système est supposé :
 - Linéaire
 - Les bruits sont supposés :
 - Blancs, gaussiens, à moyenne zéro, non corrélés

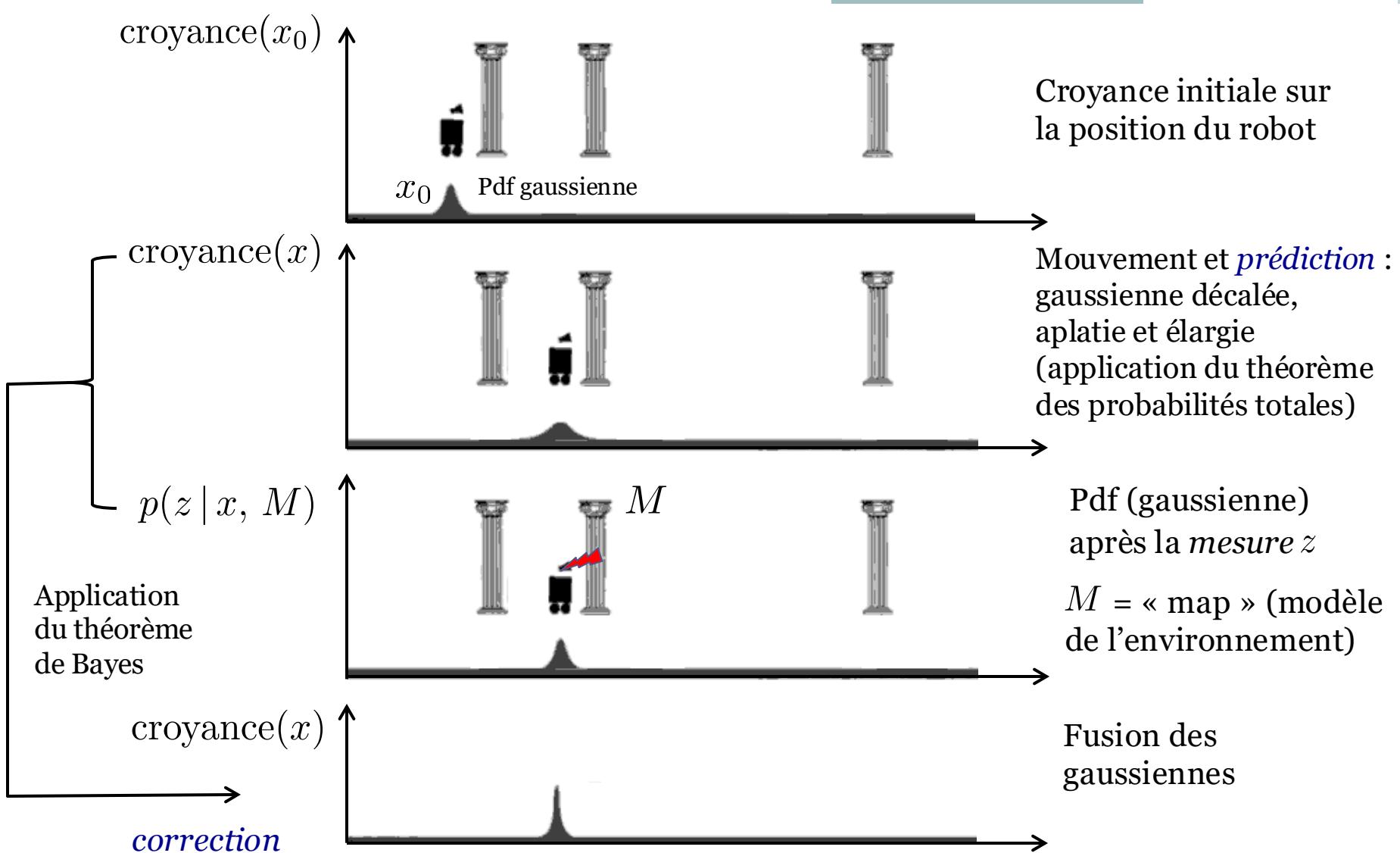
... mais pour des robots mobiles

- Equations d'état et/ou de mesure *non linéaires*.
Une linéarisation est nécessaire : filtre de Kalman étendu (**EKF**) !
 - Toute garantie d'optimalité est perdue ...
- Hypothèse de *bruit gaussien* : elle rend les calculs plus faciles, mais elle n'est pas nécessairement une description fidèle de la réalité !

Illustration graphique (1D)



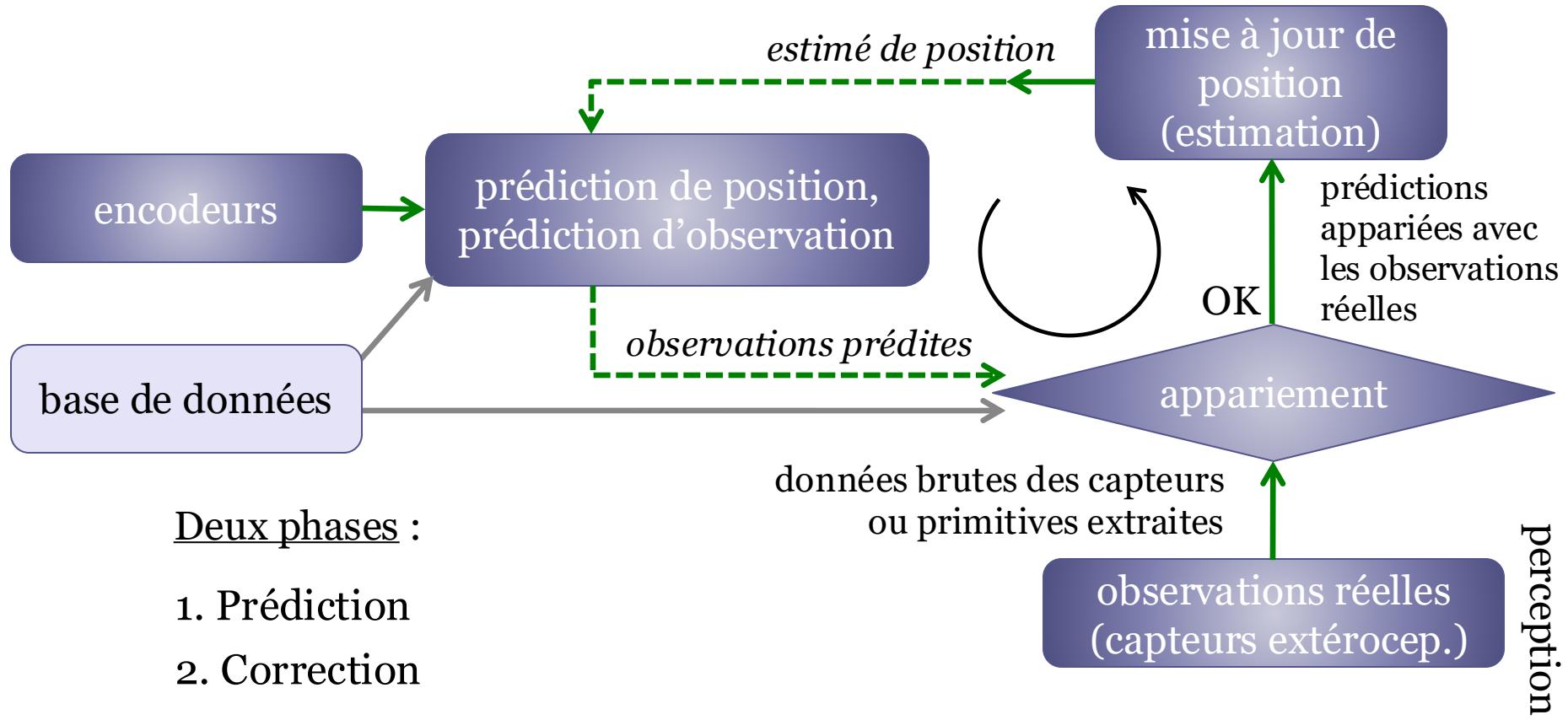
On utilise un télémètre laser pour mesurer la distance d du mur



Remarque : la variance de la croyance résultante est à la fois *plus petite* que la variance de la pdf après la mesure (ou observation) et de la précédente croyance du robot

Localisation par EKF

- On peut poser le problème de localisation comme un *problème de fusion de capteurs*



Localisation par EKF

1. Prédiction (cf. Ch. 1, partie 2)

2. Correction

a. Observation

- Mesures des capteurs
- Extraction de *primitives* (par ex. droites, cercles, blobs)

b. Prédiction de mesure (ou d'observation)

- Détermination des primitives que le robot *s'attend à observer* à partir de la position *où il croit se trouver* (c'est-à-dire, la position prédite en phase 1)

Localisation par EKF

c. Appariement (*data association*)

- Calcul de la meilleure correspondance possible entre:
 - Les primitives extraites de l'observation
 - Les primitives trouvées par la prédiction de mesure

d. Estimation

- Fusion de l'information apportée par ces appariements
- Mise à jour de la croyance sur l'état du robot

Changement de notation

Phase de prédiction de l'EKF :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Phase de correction de l'EKF :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}))$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1}$$

Par la suite, on utilisera la **notation simplifiée** du livre de Siegwart (Sect. 5.6.8) :

$k \rightarrow t$: pour indiquer le temps discret

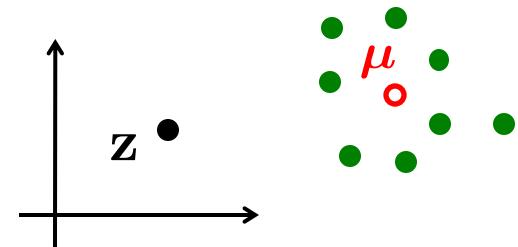
Prédiction : $\hat{\mathbf{x}}_{k k-1} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_t$ $\mathbf{P}_{k k-1} \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_t$	Correction : $\hat{\mathbf{x}}_{k k} \rightarrow \mathbf{x}_t$ $\mathbf{P}_{k k} \rightarrow \mathbf{P}_t$
---	---

Distance de Mahalanobis

Définition :

La *distance de Mahalanobis* d'un vecteur $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ vers un ensemble de vecteurs de valeur moyenne $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ et possédant une matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$ (définie positive), est définie comme suit :

$$d_{\text{Mah}}(\mathbf{z}) \triangleq \sqrt{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})}$$



Remarque :

Si $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_n$ (la matrice identité $n \times n$) la distance de Mahalanobis est simplement la *distance euclidienne* de \mathbf{z} vers $\boldsymbol{\mu}$, en effet :

$$d_{\text{Mah}}(\mathbf{z}) = \sqrt{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})^T (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})} = \|\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}\|_2$$

1. Prédiction

- La pose prédite $\hat{\mathbf{x}}_t$ dépend de \mathbf{x}_{t-1} et \mathbf{u}_t (commande)

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$$

- \mathbf{f} : fonction d'estimation odométrique de position
- On peut calculer la prédiction de covariance $\hat{\mathbf{P}}_t$:

$$\hat{\mathbf{P}}_t = \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^T + \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \mathbf{Q}_t \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^T$$
 (rappel $\Sigma_{\mathbf{p}'}, \Sigma_{\mathbf{p}}, \Sigma_{\Delta}, \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{f}, \nabla_{\Delta_{dg}} \mathbf{f}$
Ch. 1, partie 2)
 - \mathbf{P}_{t-1} : covariance de l'état précédent du robot \mathbf{x}_{t-1}
 - \mathbf{Q}_t : covariance du bruit du modèle de mouvement
 - $\mathbf{F}_{\mathbf{x}}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}}$: matrices jacobienes de \mathbf{f} (calculées par rapport à l'état estimé et à la commande courants)

1. Prédiction

- Les deux équations précédentes permettent
 - De prédire la pose du robot
 - De prédire son incertitude après un mouvement du robot spécifié par la commande \mathbf{u}_t
- Rappel
 - La croyance sur l'état est *gaussienne*
 - Mise à jour de la *moyenne* et de la *covariance* de la pdf uniquement

2. Correction (4 étapes, 1/4)

a. Observation

- \mathbf{z}_t : mesure du capteur au temps t
- Ensemble de n observations uniques extraites du capteur : \mathbf{z}_t^i , $i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$
- *Observation* : marqueur point, droite ou valeur brute
- Equation de mesure : $\mathbf{z}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, M)$

Problème:

Pose du robot Modèle de l'environnement

- Coordonnées dans un repère local au robot
- Pour l'appariement, toutes les mesures et prédictions doivent être exprimées dans le même repère
 - On a besoin d'un changement de repère : de *global* à *local*

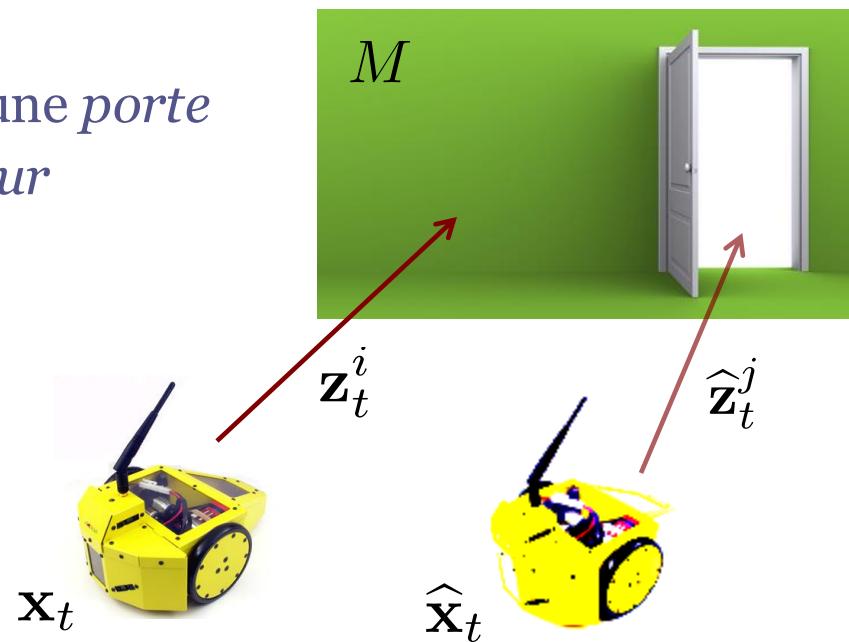
2. Correction (2/4)

b. Prédiction de mesure

- $\hat{\mathbf{x}}_t$ et la carte M : prédiction de mesure $\hat{\mathbf{z}}_t^j$
 - Ce que le robot s'attend à percevoir à la pose estimée $\hat{\mathbf{x}}_t$

Exemple :

- Le robot prédit qu'il se trouve face à une *porte*
- Le laser renvoie la perception d'un *mur*
- La *porte* est la mesure prédite $\hat{\mathbf{z}}_t^j$
- Le *mur* est la mesure réelle \mathbf{z}_t^i



$j \neq i$ car l'appariement
n'a pas encore été fait

2. Correction (2/4)

- **Calcul de prédiction de mesure :**

- Transformer les primitives \mathbf{m}^j de M dans le *repère local*
- Fonction d'observation de la primitive j :

$$\widehat{\mathbf{z}}_t^j = \mathbf{h}^j(\widehat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{m}^j)$$

- Dépend de l'estimé courant de la pose du robot $\widehat{\mathbf{x}}_t$
- Dépend de la position de chaque primitive \mathbf{m}^j dans la carte M

2. Correction (3/4)

c. Appariement

- À ce point, on a :
 - Un ensemble de mesures courantes
 - Un ensemble de primitives prédictes
- But de l'appariement :
 - Identifier toutes les mesures correspondant aux primitives prédictes
- En pratique :
 - Il faut associer la mesure \mathbf{z}_t^i à sa prédition $\hat{\mathbf{z}}_t^j$

2. Correction (3/4)

- Pour chaque appariement:

- Calcul de l'*innovation* \mathbf{v}_t^{ij}
- Elle est la différence entre les mesures observées et prédictes :

$$\mathbf{v}_t^{ij} = \mathbf{z}_t^i - \hat{\mathbf{z}}_t^j = \mathbf{z}_t^i - \mathbf{h}^j(\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{m}^j)$$

- Covariance de l'innovation :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{IN}_t}^{ij} = \mathbf{H}^j \hat{\mathbf{P}}_t (\mathbf{H}^j)^T + \mathbf{R}_t^i$$

Matrice de covariance
 de la mesure réelle \mathbf{z}_t^i
 ↑ Jacobienne de \mathbf{h}^j par rapport à l'état estimé $\hat{\mathbf{x}}_t$

- Validité de l'appariement :

- *Distance de Mahalanobis* (au carré)
 avec un seuil $g > 0$ fixé:

$$(\mathbf{v}_t^{ij})^T (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{IN}_t}^{ij})^{-1} \mathbf{v}_t^{ij} \leq g^2$$

2. Correction (4/4)

d. Estimation

- Calcul du meilleur estimé \mathbf{x}_t de la pose du robot et de la matrice covariance \mathbf{P}_t
- Se base sur :
 - La pose prédictive $\widehat{\mathbf{x}}_t$
 - Les mesures courantes \mathbf{z}_t^i

2. Correction (4/4)

- Étapes à suivre :
- On calcule l'innovation composite \mathbf{v}_t à partir des \mathbf{v}_t^{ij} (qui ont validé l'appariement)
- On empile les \mathbf{H}^j en \mathbf{H}_t
- On assemble les covariances : $\mathbf{R}_t = \text{blkdiag}(\mathbf{R}_t^1, \mathbf{R}_t^2, \dots, \mathbf{R}_t^n)$
- On calcule la covariance de l'innovation composite Σ_{IN_t}
- On met à jour l'estimé de pose \mathbf{x}_t et sa covariance \mathbf{P}_t :

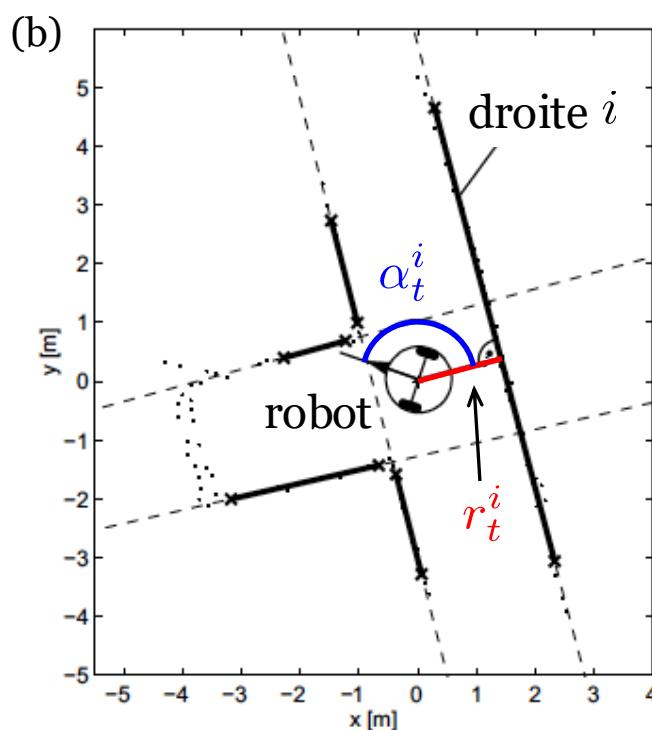
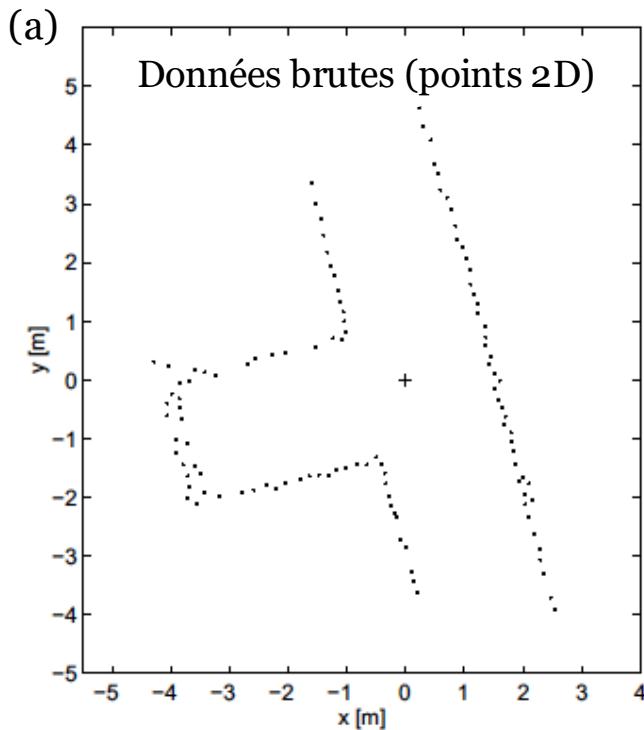
$$(I) \quad \mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{v}_t$$

$$(II) \quad \mathbf{P}_t = \hat{\mathbf{P}}_t - \mathbf{K}_t \Sigma_{\text{IN}_t} \mathbf{K}_t^T$$

où $\mathbf{K}_t = \hat{\mathbf{P}}_t \mathbf{H}_t^T (\Sigma_{\text{IN}_t})^{-1}$ est le *gain* de l'EKF

TD2 : étude de cas sur Matlab

- Localisation par filtre de Kalman étendu (EKF)
- *Robot unicycle* à conduite différentielle
- Primitives dans l'environnement (M) : *droites*
- Capteur extéroceptif : *télémètre laser 2D*



Mesure de la droite i en coordonnées polaires :

$$\mathbf{z}_t^i = \begin{bmatrix} \alpha_t^i \\ r_t^i \end{bmatrix}$$

Plan du chapitre

- Introduction et défis

Partie 1

- Odométrie

Partie 2

- Localisation par filtre de Kalman

Partie 3

- Autres techniques de localisation

Partie 4

Localisation Monte Carlo

- Filtre de Kalman
 - Pdf gaussienne
- Filtre particulaire (*particle filter*^{*}, en anglais)
 - Pas limité à pdf unimodales

Localisation Monte Carlo : le filtre particulaire est utilisé pour représenter la croyance sur l'état du robot

- Ensemble de N poses initiales dans une carte
- On fait évoluer ces N poses possibles en fonction des perceptions proprioceptives et extéroceptives via un modèle probabiliste
- Quand les N poses (à savoir, les N particules), convergent vers un même état, la localisation est la plus sûre possible

^{*} "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking", M.S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, IEEE Trans. Signal Proces., vol. 50, n. 2, pp. 174-188, 2002

Exemple

État initial

Les N particules sont en rouge

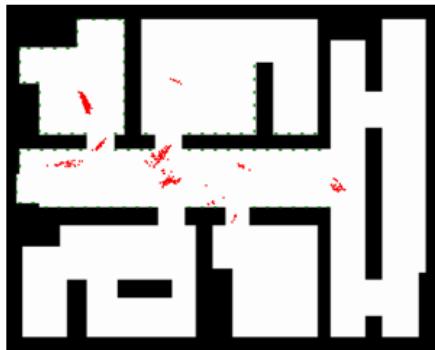


Itération 0



Itération 8

Le robot
se déplace



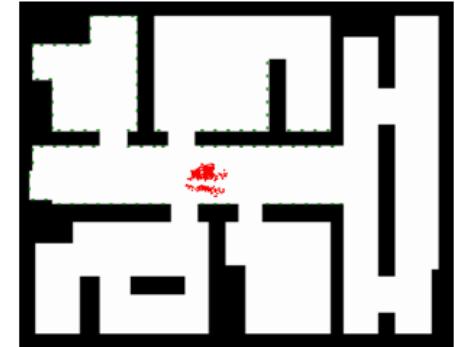
Itération 2



Itération 12



Itération 4



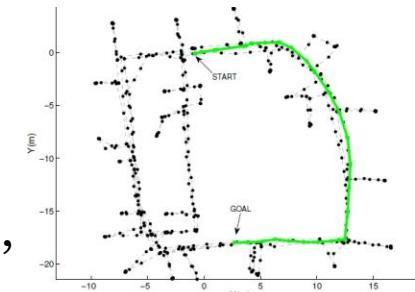
Itération 16

Localisation Monte Carlo : très utilisée dans les applications à cause de sa robustesse (cf. le livre "Probabilistic Robotics", S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, MIT press, 2005)

Construction autonome de carte

- **SLAM (Simultaneous Localization And Mapping)**
 - Localisation et cartographie simultanées (pas de connaissance *a priori* de carte)
 - Solution efficace du SLAM : « Saint Graal » de la robotique mobile
 - Formalisme du *filtre de Kalman étendu* (« EKF SLAM »)
 - On estime :
 - L'état du robot et son incertitude
 - L'état et l'incertitude de chaque primitive (point, droite, etc.) perçue de l'environnement

Recherche très active : SLAM visuel (une caméra: MonoSLAM, LSD-SLAM, ORB-SLAM, OpenVSLAM, PTAM), SLAM basé filtre particulaire, SLAM coopératif ou C-SLAM, « Pose Graph Optimization » (PSO), etc.



"Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: Toward the robust-perception age",
 C. Cadena, L. Carlone, H. Carrillo, Y. Latif, D. Scaramuzza, J. Neira, I. Reid, J.J. Leonard, IEEE Trans. Robotics, vol. 32, n. 6, pp. 1309-1332, 2016

Construction autonome de carte

Le “rêve” des roboticiens : Scène du film *Prometheus* (Ridley Scott, 2012)



<https://www.youtube.com/watch?v=yA6OKoW3oPk>

Localisation basée balises

- Balise/amer (*beacon* ou *landmark*, en anglais)
 - Objet *passif* ou *actif* dans le champ de perception du robot
 - La position globale des balises est *connue* avec précision

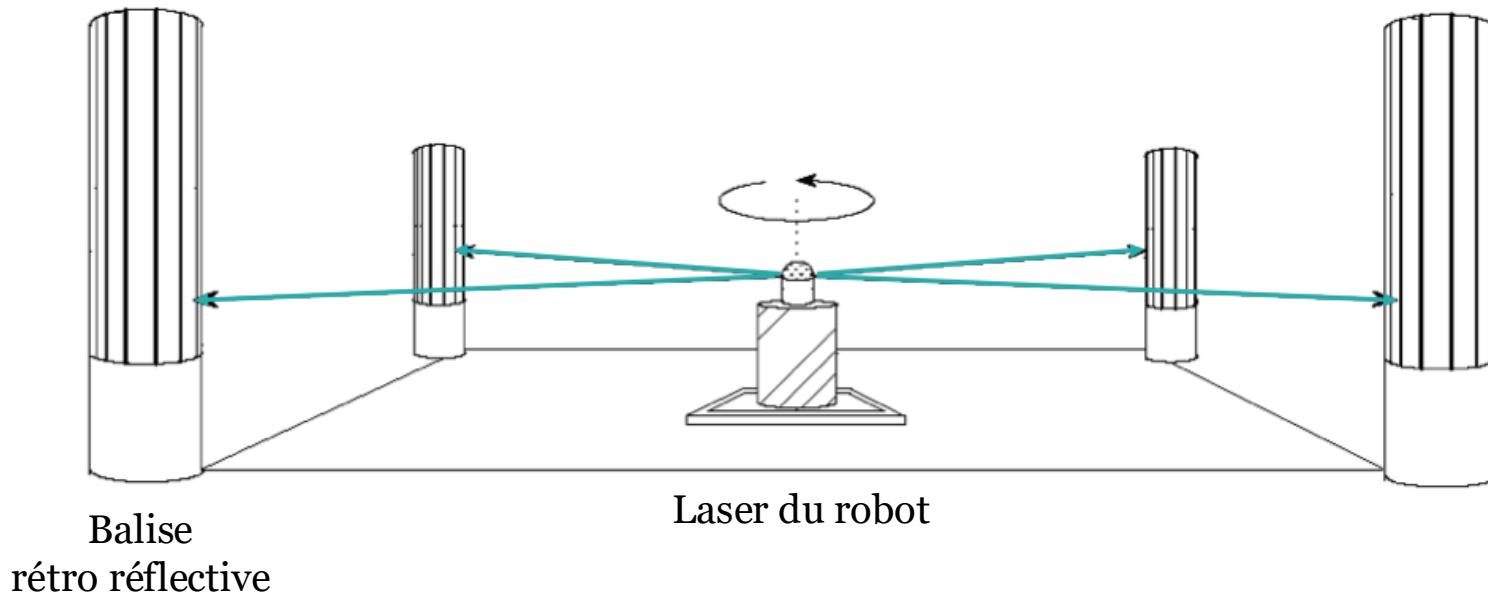
a. **Balise passive**

- Considérée avec la localisation par filtre de Kalman
- *Problème* : répartition judicieuse des balises dans l'environnement

Localisation basée balises

Exemple 1 : balises rétro réflectives

- Robot équipé avec une nappe laser
- Mesure d'énergie renvoyée vers le robot
- 3 balises minimum (moins si l'odométrie est disponible)



Localisation basée balises

Exemple 2 : balises colorées

- Chaque balise a un code couleur unique
- Le robot est équipé avec une caméra (standard ou panoramique) qui permet de détecter les balises



Robot avec caméra panoramique embarquée

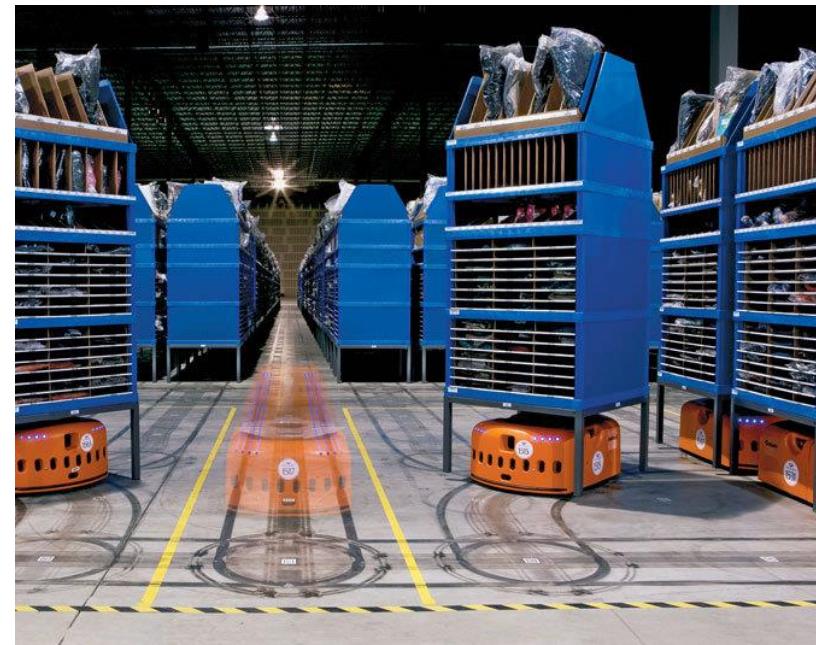
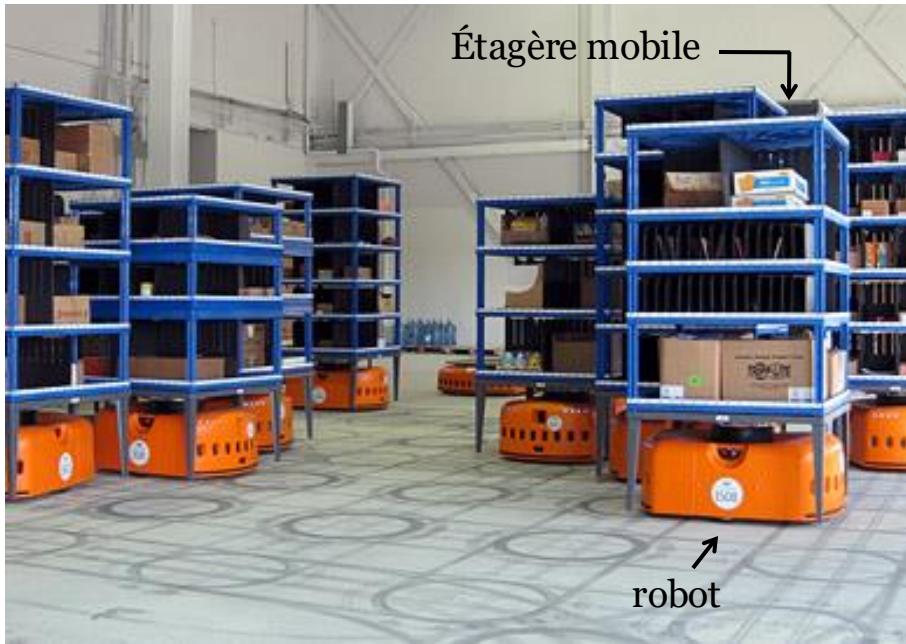


Balises avec code couleur
(3 couleurs : noir, jaune, rose)

Localisation basée balises

Exemple 3 : codes à barres

- *Kiva Systems* (acquise par Amazon en 2011) : système robotisé pour le stockage en entrepôt



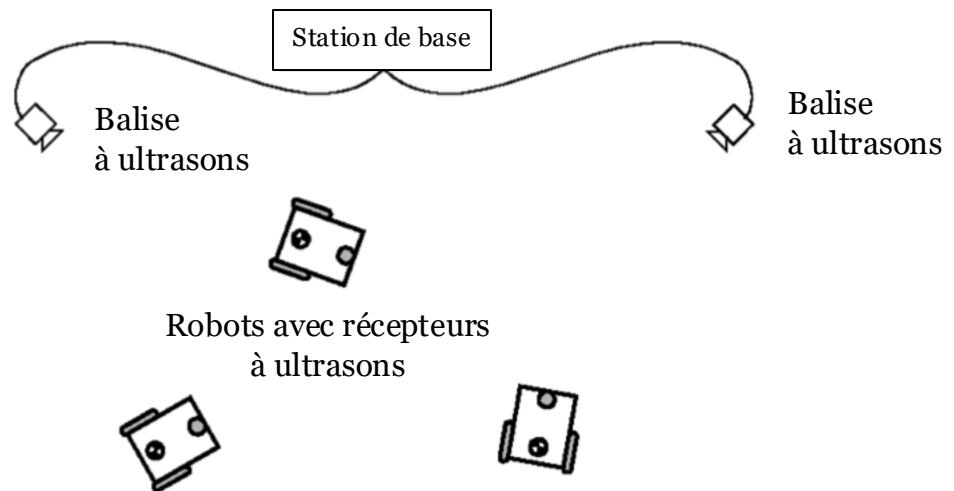
Localisation basée balises

b. Balise active

- Applications industrielles et militaires
- Localisation robuste ...
... mais pré-équipement coûteux de l'environnement

Exemple : balises à ultrasons

- Localisation précise
- Peu flexible !



Localisation basée chemin



- Encore plus fiable que les balises
- Le chemin du robot est explicitement tracé
 - Localisation relative au chemin

Exemples :

- Tracé de peinture UV réflective
- Câble guide sous le sol détecté par induction électromagnétique

Inconvénients

- Encore moins flexible que les balises actives
- Le robot ne doit pas trop dévier du chemin prévu