Localisation et navigation de robots

UPJV, Département EEA

M2 3EA, EC32, parcours RoVA

Année Universitaire 2025-2026

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mercredi et Jeudi 9h30-12h00, salle CURI 8 ou 305 : CM & TD
Jeudi, salle TP204 : TP

Electronique
Energie Electrique
Automatique

Plan du chapitre

Stratégies de navigation	**Partie 1**
Architectures de contrôle	**Partie 2**
Navigation vers un but	**Partie 3**
Planification de trajectoire et évitement d'obstacles	**Partie 4**

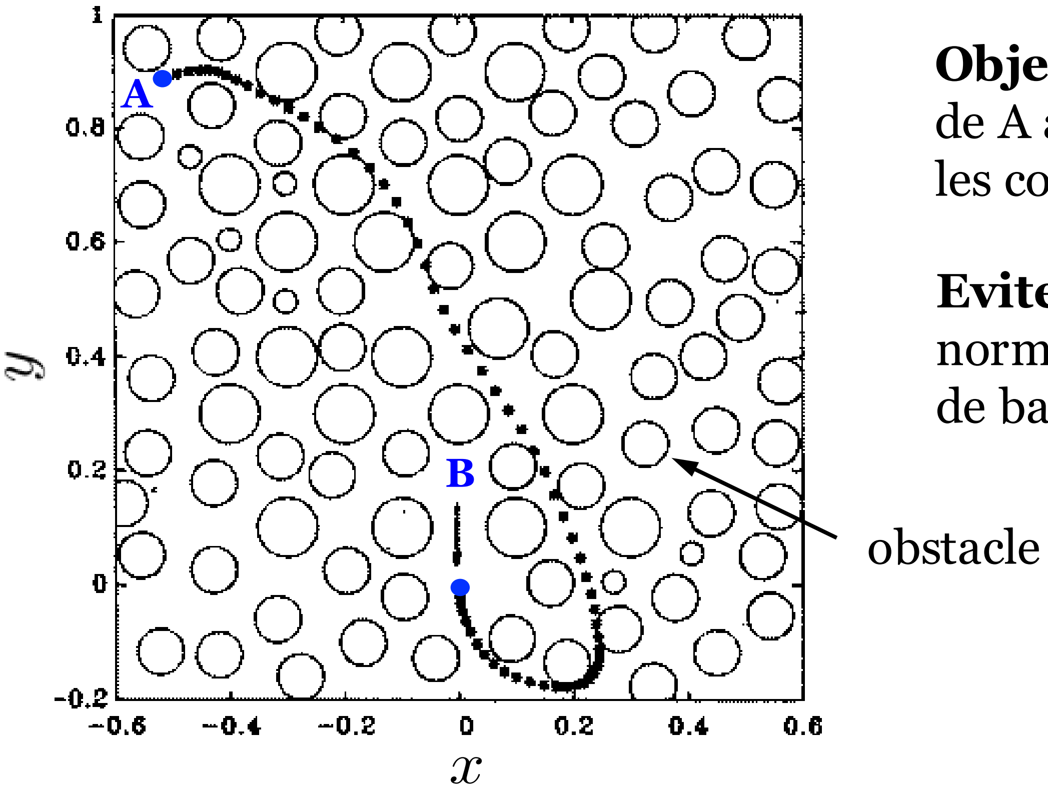
Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d'obstacles

Introduction

Obstacle

- *Statique* ou *dynamique*

Exemples : poteau, mur, marche, humain, voiture, autres robots



Objectif : déterminer un parcours de A à B qui permet au robot d'éviter les collisions avec les obstacles

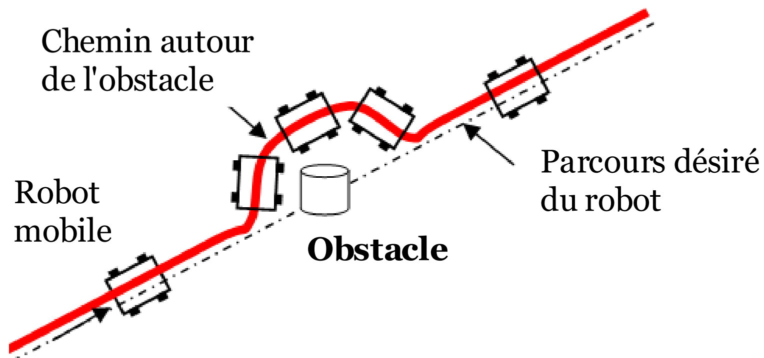
Evitement d'obstacles : géré normalement par un contrôleur de bas-niveau

Introduction

- Comportement de base indispensable au bon fonctionnement d’un robot dans un *environnement dynamique*
- Il faut gérer les écarts entre le modèle interne et le monde réel

Méthodes (pour des *obstacles statiques*) :

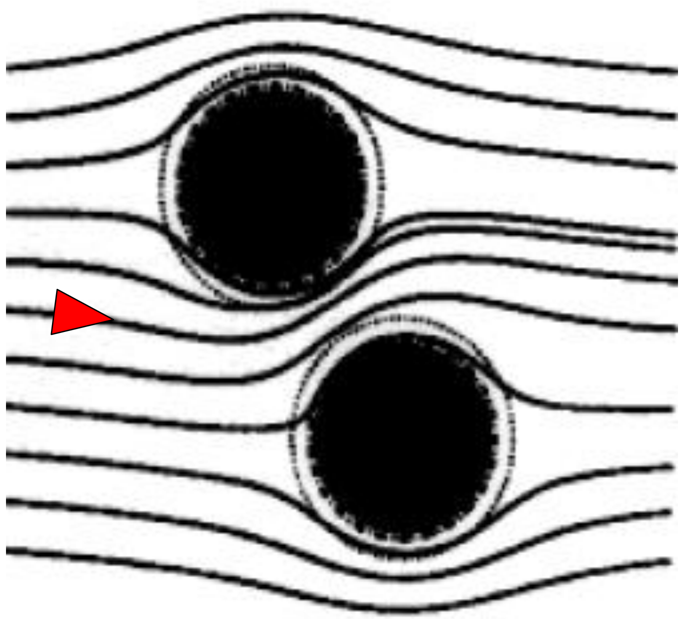
0. *Véhicule de Braitenberg* (approche réactif, pas de carte de l’environ.)
1. Champs de potentiel
2. Vector field histogram
3. Fenêtre dynamique
4. Graphe de Voronoï
5. Planification probabiliste : PRM et RRT



- Besoin de perceptions précises (ex. télémètres laser) : avec sonars ou autres, une représentation *locale* de l’environnement, centrée sur le robot, peut être nécessaire
- Carte de l’environnement : *connue*
- Représentation de l’environnement : mét. 1, 3, 4, 5 *déterministe*, mét. 2 *probabiliste*

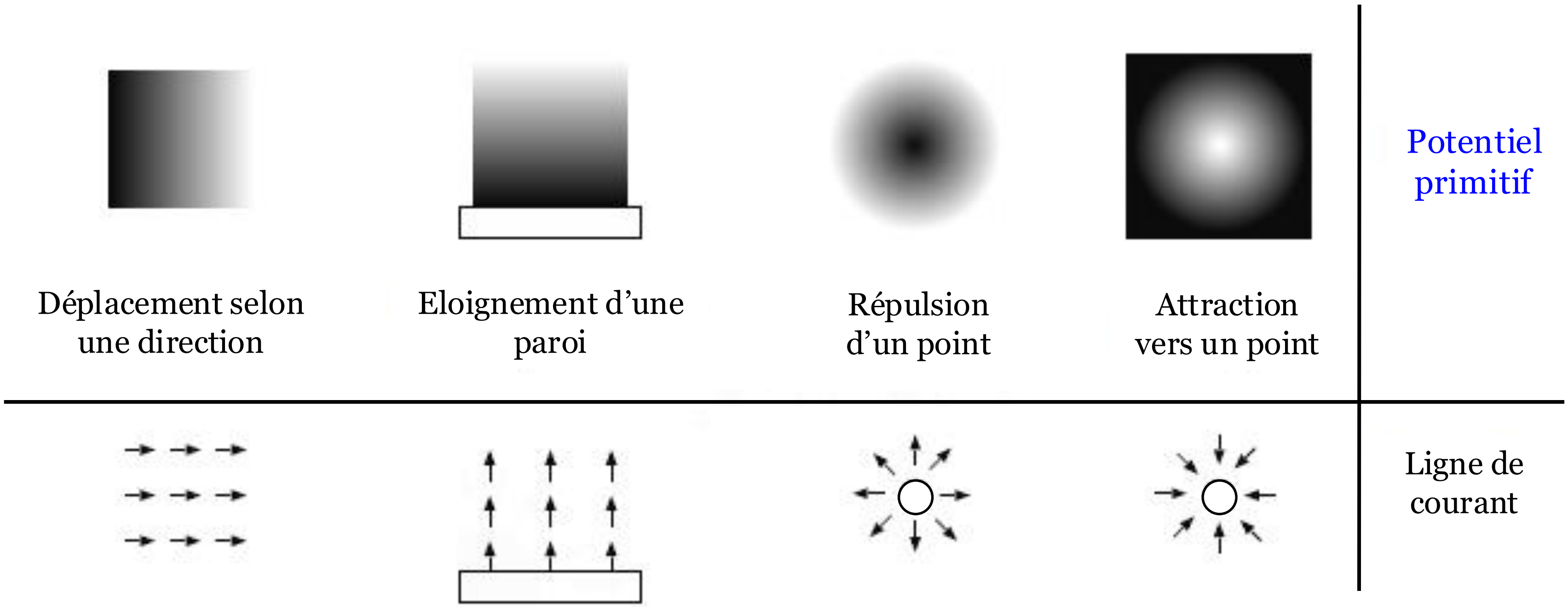
Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d’obstacles

1. Champs de potentiel



Champs de potentiel : introduction

- Robot : vu comme une *particule*
- Déplacement suivant les lignes de courant d’un potentiel obtenu par la perception de l’environnement



“Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots”, O. Khatib, Int. Journal of Robotics Research, vol. 5, n. 1, pp. 90-98, 1986

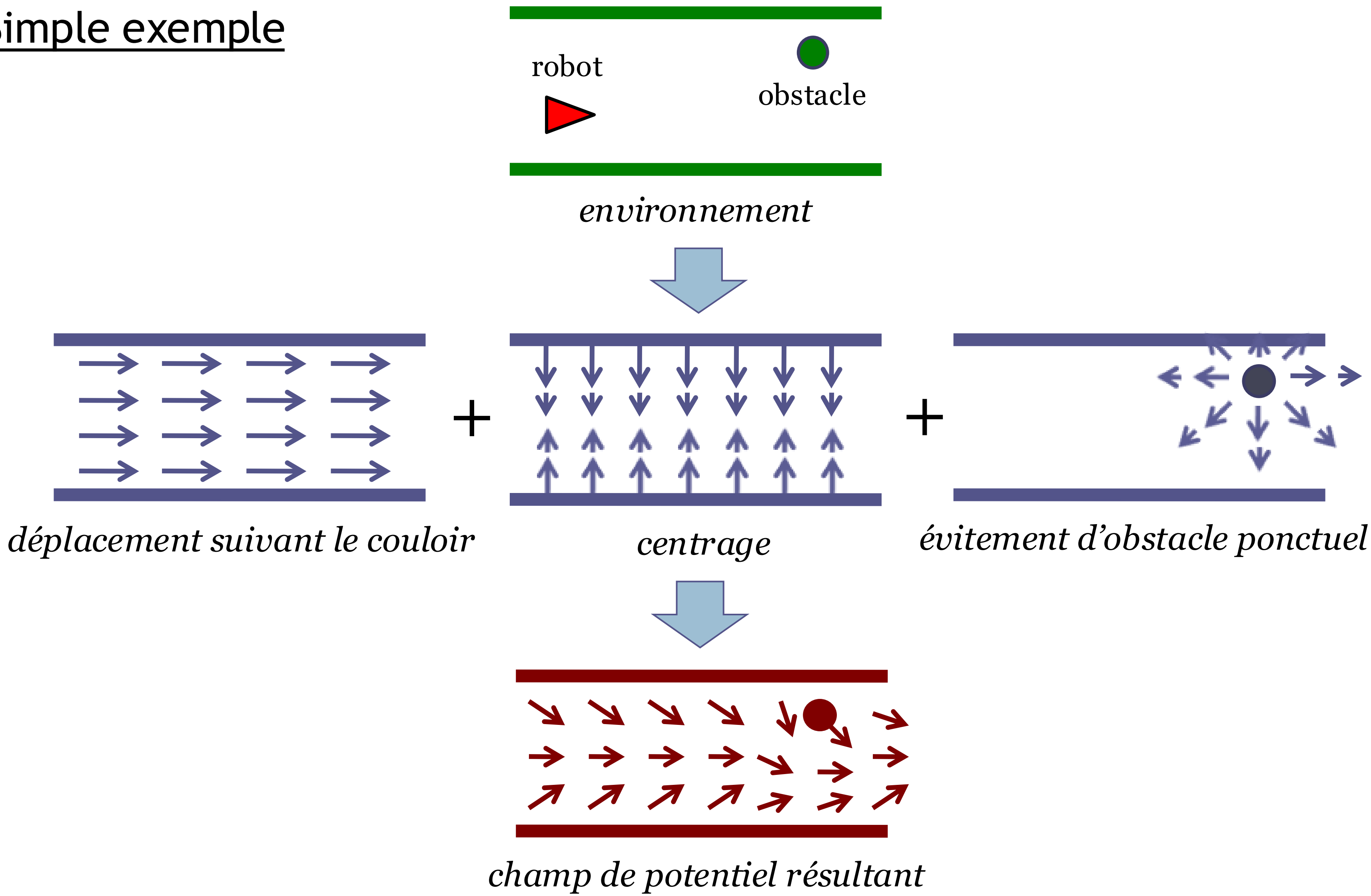
Champs de potentiel : introduction

- Potentiel : différents objectifs
  - Évitement d’obstacles
  - Déplacement dans une direction préférée (vers le but)
- Comment le calculer ?
  - Sommation de potentiels primitifs
- Particularités des potentiels primitifs
  - Étendue spatiale limitée ou non
  - Intensité : fonction de la distance ou non

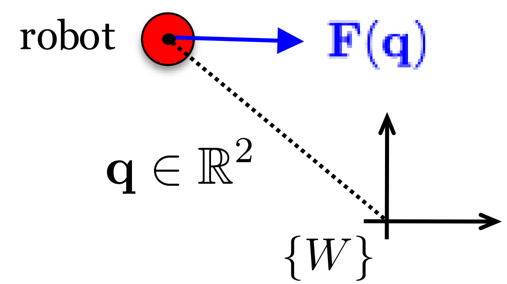
“Robotics Modeling, Planning and Control”, B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, Springer 2009, Sect. 12.6

Champs de potentiel : introduction

<u>Simple exemple</u>



Champs de potentiel



Formulation mathématique :

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = -\nabla U(\mathbf{q})$$

où

$\mathbf{F}(\mathbf{q})$: force agissant sur le robot dans la position $\mathbf{q} = [x,\ y]^T$

$U(\mathbf{q})\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction potentiel de l'environnement

En d'autres termes, la force $\mathbf{F}$ agissant sur le robot dans la position $\mathbf{q}$ est égale au gradient négatif de la fonction potentielle $U(\mathbf{q})$

- Nous étudierons deux types de potentiel U :

1) **Potentiel attractif** : pour guider le robot vers le but $\mathbf{q}_b$

2) **Potentiel répulsif** : pour éviter la collision avec les obstacles

Champs de potentiel

Potentiels attractifs :

1) *Fonction quadratique* de la distance du but $\mathbf{q}_b$:

$$U_a(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} k_a \|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}\|^2, \ k_a > 0$$

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{q}) = -\nabla U_a(\mathbf{q}) = k_a(\mathbf{q}_b - \mathbf{q})$$

Convergence vers zéro linéaire lorsque $\mathbf{q}$ tend vers $\mathbf{q}_b$; $\mathbf{F}_a$ tend à augmenter indéfiniment lorsque la norme de l'erreur augmente

2) *Fonction linéaire* de la distance du but $\mathbf{q}_b$:

$$U_a(\mathbf{q}) = k_a \|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}\|, \ k_a > 0$$

$$\mathbf{F}_a(\mathbf{q}) = -\nabla U_a(\mathbf{q}) = k_a \frac{\mathbf{q}_b - \mathbf{q}}{\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}\|}$$

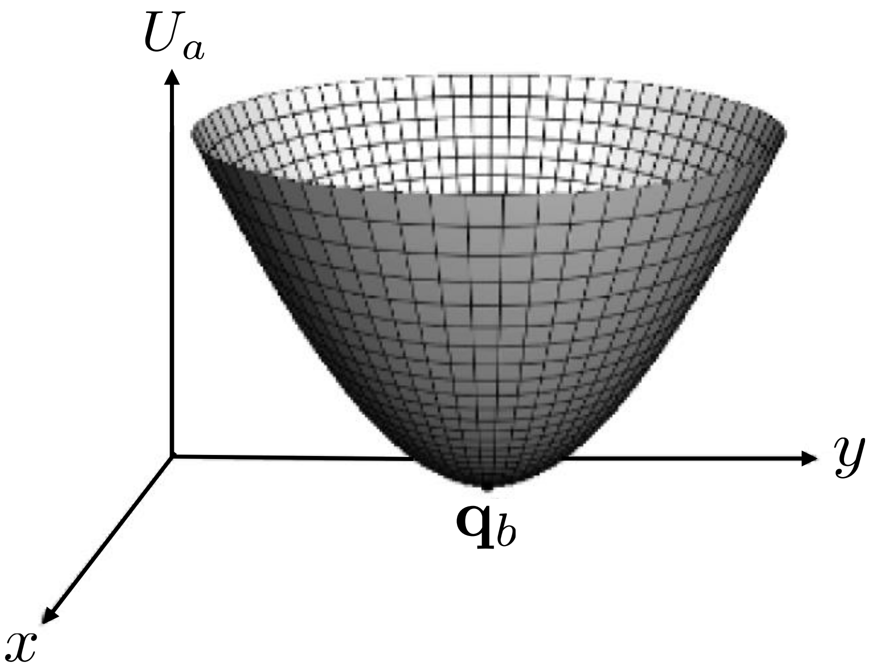
Module de la force constant : $\mathbf{F}_a$ n'est pas définie en $\mathbf{q}_b$

Bon compromis : utiliser la 2^{e} fonction lorsque le robot est éloigné du but et la 1re près de $\mathbf{q}_b$. Pour avoir une *force continue*, passer de l'une à l'autre lorsque $\|\mathbf{q}_b - \mathbf{q}\| = 1$

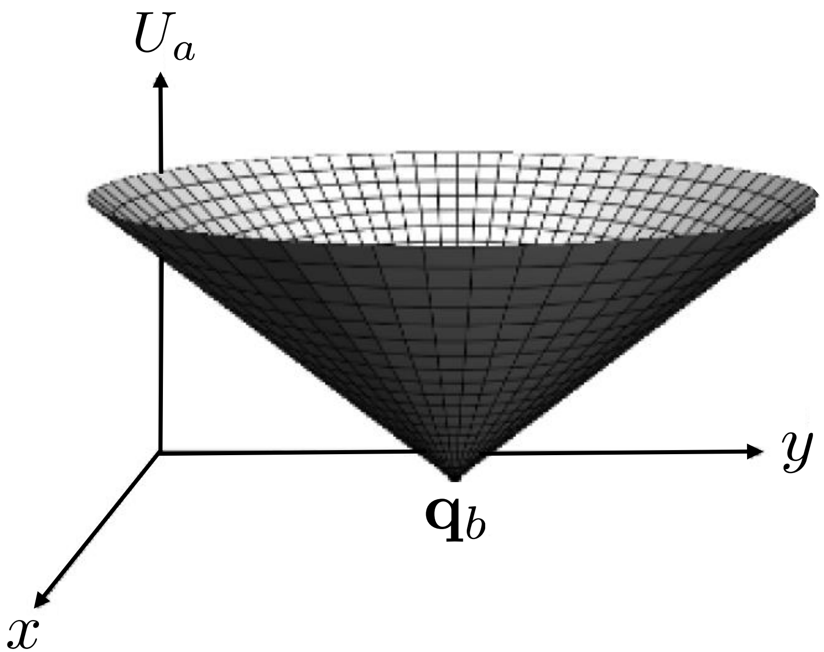
Champs de potentiel

Potentiels attractifs :

1) *Fonction quadratique* : paraboloïde

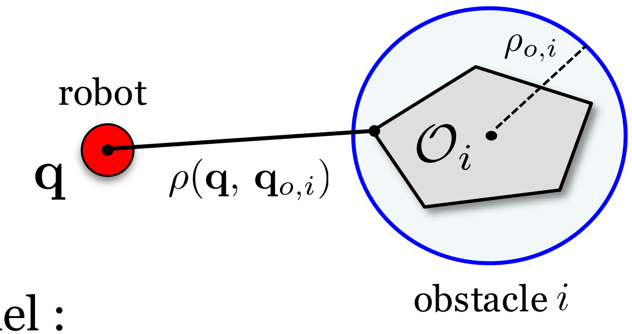


2) *Fonction linéaire* : cône



Les deux fonctions ont été dessinée pour $k_a = 1$

Champs de potentiel



Potentiels répulsifs :

Pour un obstacle convexe $\mathcal{O}_i$, on peut définir le potentiel :

$$U_{r,i}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \dfrac{k_{r,i}}{\gamma} \left(\dfrac{1}{\rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i})} - \dfrac{1}{\rho_{o,i}} \right)^{\gamma} & \text{si } \rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) \leq \rho_{o,i} \\ 0 & \text{si } \rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) > \rho_{o,i} \end{cases}$$

avec $i \in \{1, \ldots, N\}$ (N est le nombre d'obstacles), étant :

$k_{r,i}$: constante positive

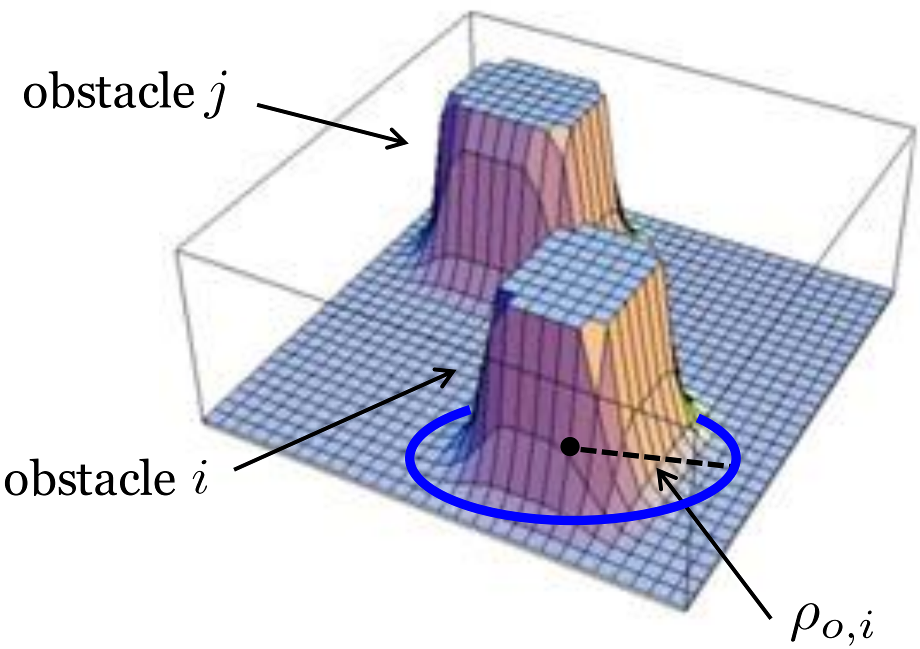
$\rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) = \min\limits_{\mathbf{q}_{o,i} \in \mathcal{O}_i} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{o,i}\|$: distance minimale entre la position du robot $\mathbf{q}$ et les points $\mathbf{q}_{o,i}$ de l'obstacle i

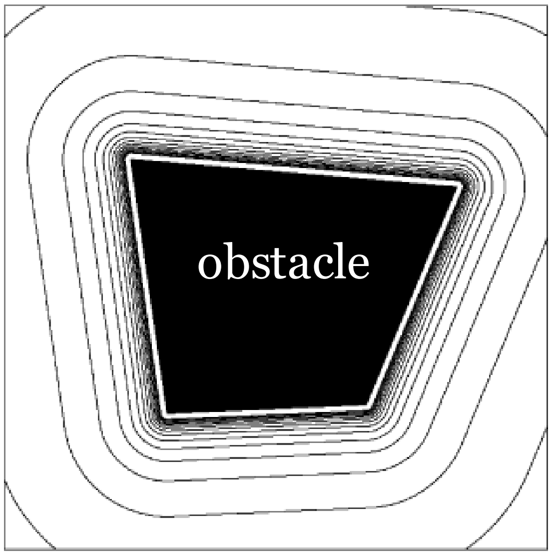
$\rho_{o,i}$: rayon d'influence de l'obstacle i

$\gamma \in \{2,\, 3, \ldots\}$

Champs de potentiel

Potentiels répulsifs :





Contours équipotentiels d'un potentiel répulsif $U_{r,i}$ pour $k_{r,i} = 1\,, \gamma = 2$

Si γ est grand, la “pente” du potentiel est forte (typiquement, $\gamma = 2$)

Champs de potentiel

Potentiels répulsifs :

Force repulsive résultante du potentiel $U_{r,i}(\mathbf{q})$:

$$\mathbf{F}_{r,i}(\mathbf{q}) = -\nabla U_{r,i}(\mathbf{q})$$
$$= \begin{cases} \dfrac{k_{r,i}}{\rho^2(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i})} \left(\dfrac{1}{\rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i})} - \dfrac{1}{\rho_{o,i}} \right)^{\gamma-1} \nabla \rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) & \text{si } \rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) \leq \rho_{o,i} \\ 0 & \text{si } \rho(\mathbf{q},\, \mathbf{q}_{o,i}) > \rho_{o,i} \end{cases}$$

On peut définir le *potentiel répulsif global* (pour les N obstacles), comme :

$$U_r(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} U_{r,i}(\mathbf{q})$$

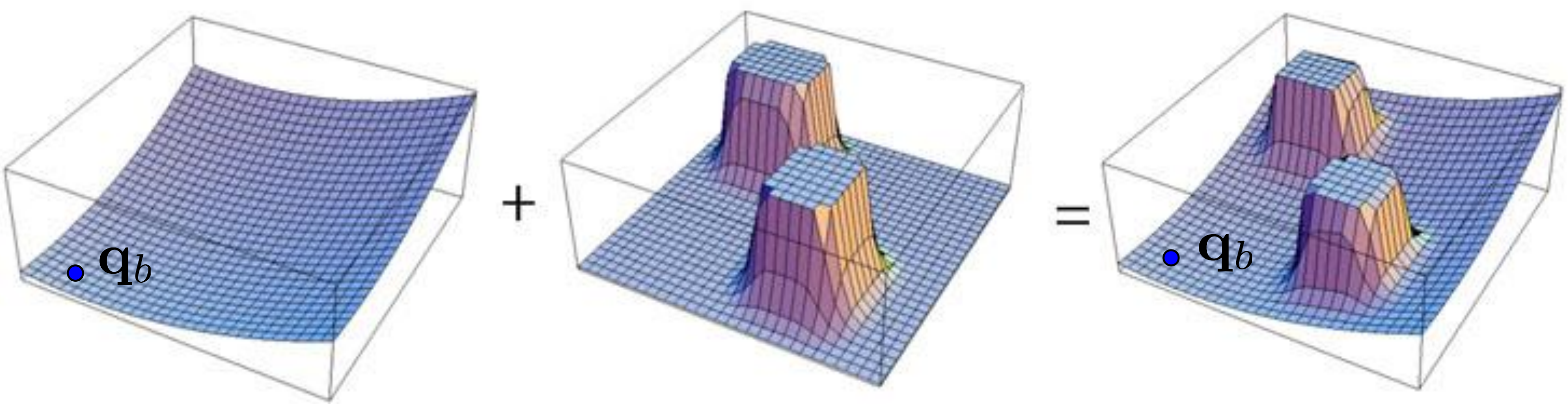
Champs de potentiel

Potentiel total = Potentiel attractif + Potentiels répulsifs

$$U_t(\mathbf{q}) = U_a(\mathbf{q}) + U_r(\mathbf{q})$$

Ceci se traduit par la *force totale* agissant sur le robot à la position $\mathbf{q}$:

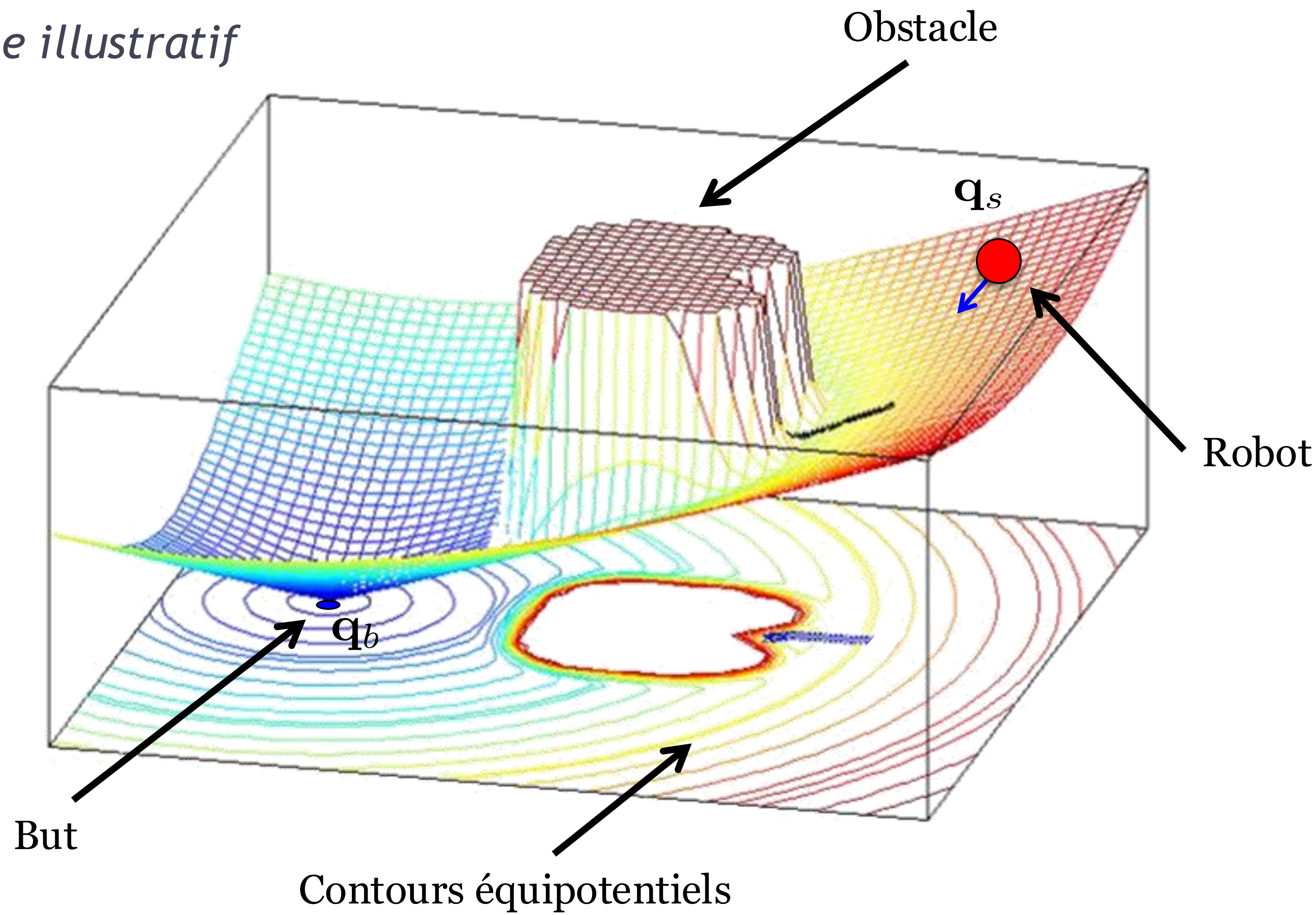
$$\mathbf{F}_t(\mathbf{q}) = -\nabla U_t(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_a(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{r,i}(\mathbf{q})$$



Potentiel attractif | Potentiels répulsifs | Potentiel total

Champs de potentiel

Exemple illustratif



Champs de potentiel

Pour atteindre le but $\mathbf{q}_b$, on peut utiliser la *descente de gradient*.
À partir de :

$$\dot{\mathbf{q}} = -\nabla U_t(\mathbf{q})$$

si $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_s$ est la position initiale du robot, on peut mettre à jour sa position au fil du temps de la manière suivante :

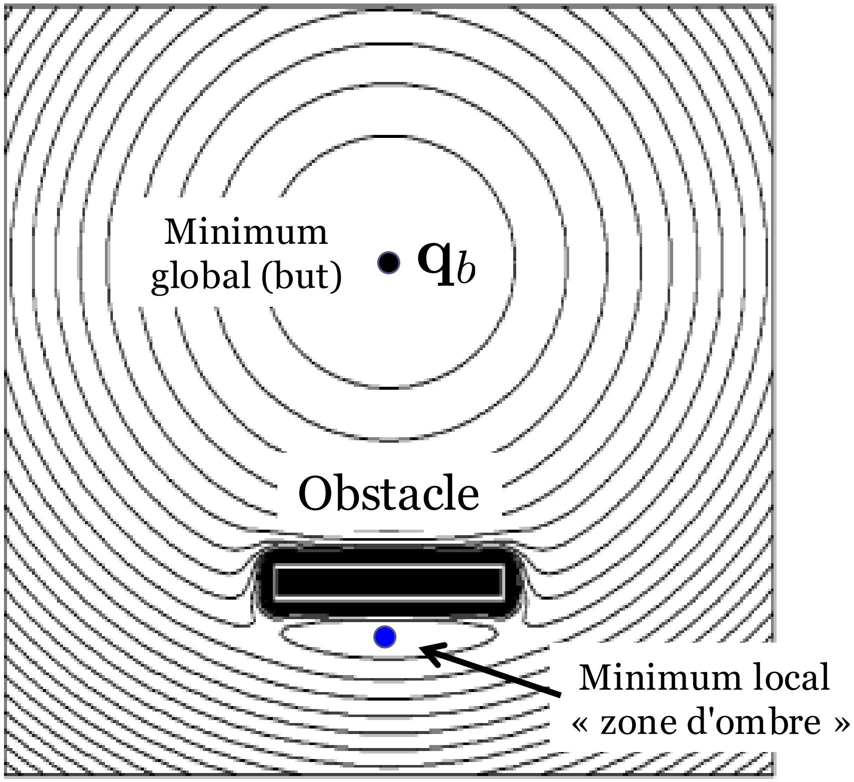
$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \alpha_k \frac{\mathbf{F}_t(\mathbf{q}_k)}{\|\mathbf{F}_t(\mathbf{q}_k)\|}, \;\; \alpha_k > 0, \;\; k \in \{0, 1, \ldots\}$$

Problème : convergence vers tout *point critique* $\mathbf{q}^*$ où $\nabla U_t(\mathbf{q}^*) = \mathbf{0}$.
Il faut vérifier la dérivée seconde de U_t : la matrice Hessienne de U_t évaluée en $\mathbf{q}^*$ doit être définie positive pour avoir un *minimum local*

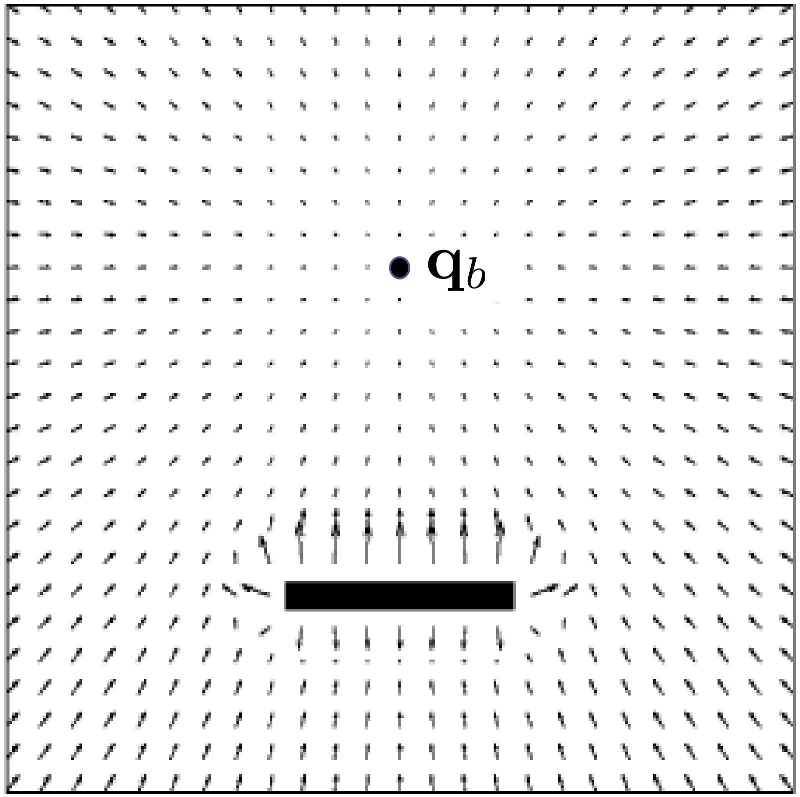
$$\mathbf{H}(\mathbf{q}^*) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 U_t}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 U_t}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 U_t}{\partial y^2} \end{array}\right]\Bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*} \succ \mathbf{0}$$

Champs de potentiel

<u>Exemple</u> : *obstacle rectangulaire*



Contours équipotentiels



Champ de force $\mathbf{F}_t(\mathbf{q})$ résultant
(lignes de courant)

Champs de potentiel

- Problèmes
  1. *Minima locaux* du potentiel dans certaines configurations
  2. Pas de « décision » de la direction à prendre pour le robot
- Solutions au 1er problème :
  - Lorsque dans un minimum local, déclencher un comportement différent :
    - Par ex. déplacement aléatoire, suivi de murs
  - Hypothèse du « *monde sphérique* » : tous les obstacles ont une forme sphérique. Le potentiel total a des points-selles isolés (où le gradient est zéro), mais pas des minima locaux
  - Fonctions de navigation [Rimon & Koditschek, TRA'92], champs rotationnels, fonctions de Morse, potentiel imposé en fonction harmonique*
    - Les fonctions harmoniques garantissent l'absence de minima locaux, mais elles ont une complexité élevée (résultats en simulation uniquement)

* Une *fonction harmonique* est une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable qui satisfait l'équation de Laplace sur Ω, à savoir $\Delta f = 0$.

Champs de potentiel : sommaire

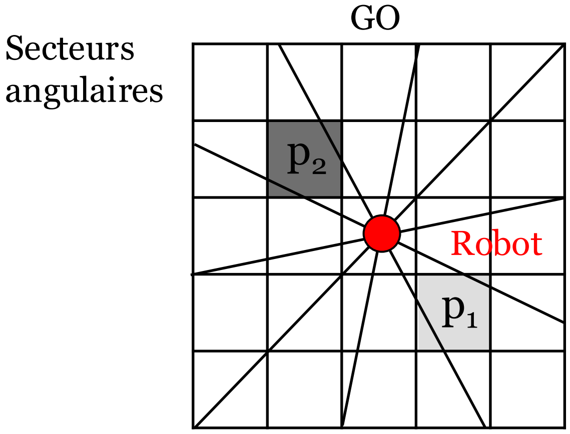
- Avantages :
  1) Capacité de générer « en temps réel » des trajectoires pour éviter les obstacles
  2) Facilité de mise en œuvre
- Formalisme du *schéma moteur*
  - Action sous forme de potentiel
  - Dépend des perceptions
- Utilisation
  - Bas-niveau dans une architecture hybride

Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d’obstacles

2. Vector field histogram (VFH)

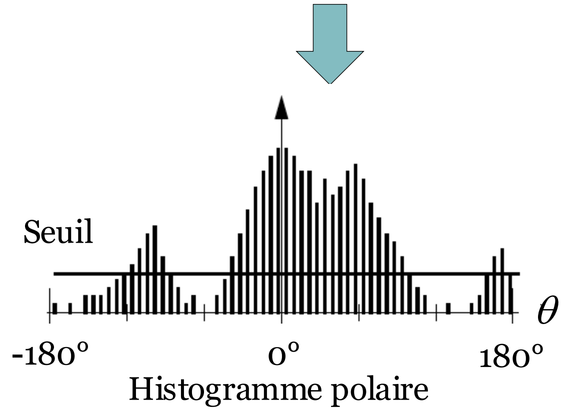
Vector field histogram

- Historiquement inventé pour les sonars (capteurs à ultrasons)
- Robustesse aux incertitudes de modèle/mesure



1. Grille d'occupation (GO) locale

- Représentation statistique de l'environnement
- Discrétisation de l'espace en cellules de taille fixe
- Chaque cellule contient une probabilité p_i
  - Haute si souvent perçue contenant un obstacle par le sonar (ou le laser)
  - Faible sinon
- Mise à jour en continu (en temps réel)



2. Histogramme d'occupation

Représente l'occupation de l'espace autour du robot

"*The Vector Field Histogram - Fast Obstacle Avoidance for Mobile Robots*", Y. Koren, J. Borenstein, IEEE Trans. Robot. Autom., vol. 7, n. 3, pp. 278-288, 1991

Vector field histogram

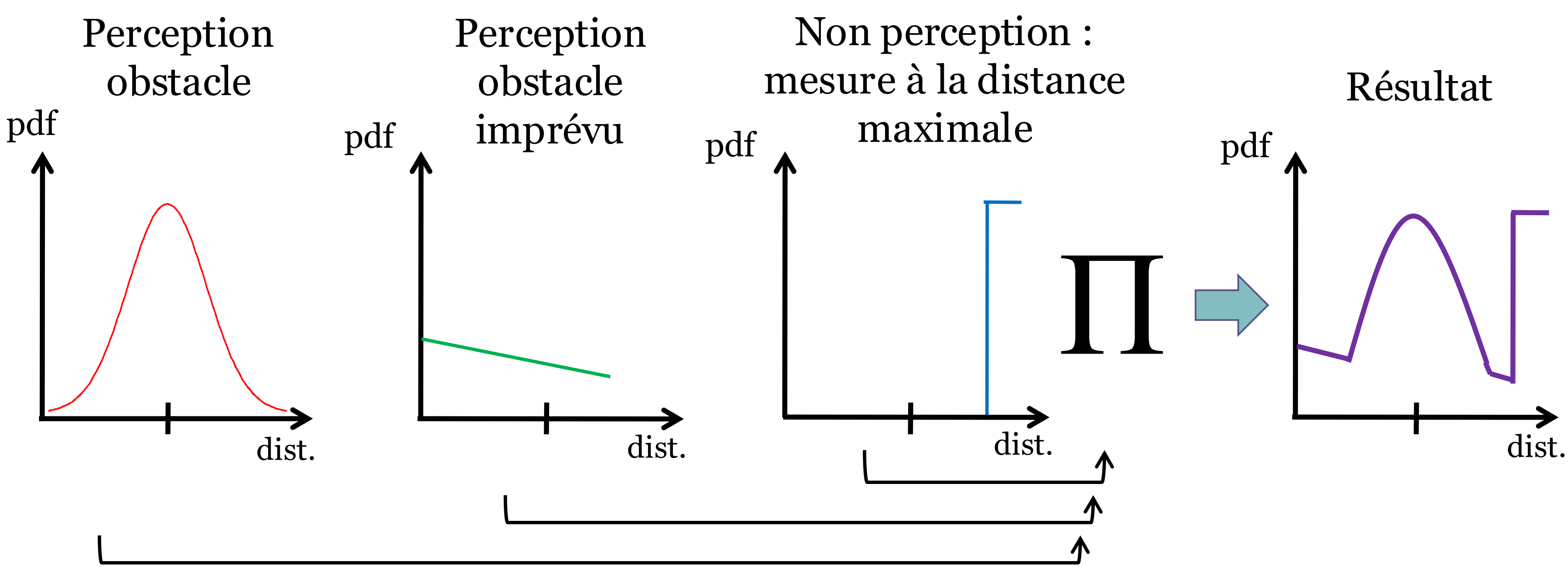
1. Construction de la grille d'occupation (GO)
   - Estimation de la position du robot
     (cf. le chapitre 1 : localisation par odométrie)
   - Perception
   - Mise à jour des cellules de la GO
     - Modèle probabiliste : $p(\mathrm{occ}_i \mid s)$

Pour une perception s donnée, $p(\mathrm{occ}_i \mid s)$ nous fournit la *probabilité d'occupation de la cellule* i dans le champ de vue du capteur du robot, en fonction de la valeur renvoyée par le capteur

1. Construction d'une GO

- *Modèle probabiliste* d'un capteur à ultrasons
- Probabilité de mesure en fonction de la *distance* de l'obstacle :

$$p(\text{obstacle} \mid \text{scan}) = \prod_{j=1}^{M} p(\text{mesure } j \mid \text{distObstacle})$$



1. Construction d'une GO

- $p(\mathrm{occ}_i \mid s)$
  - Similaire au cas précédent
  - Erreur gaussienne pour l'écart entre :
    - La direction de la cellule
    - La direction du capteur

- **Objectif :**
  - Accumuler les T mesures $s_1, \ldots, s_T$
  - Estimer la probabilité de la cellule i d'être occupée :

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = p(\mathrm{occ}_i \mid s_1, \ldots, s_T)$$

1. Construction d'une GO

- Théorème de Bayes pour extraire la probabilité en fonction de la *dernière mesure* s_T. Rappel que :

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{p(y)}$$

- Dans notre cas :

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = \frac{p(s_T \mid \mathrm{occ}_i, \cancel{s_1, \ldots, s_{T-1}})\, p(\mathrm{occ}_i^{T-1})}{p(s_T \mid s_1, \ldots, s_{T-1})}$$

- Avec une hypothèse de « *monde statique* », on simplifie :

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = \frac{p(s_T \mid \mathrm{occ}_i)\, p(\mathrm{occ}_i^{T-1})}{p(s_T \mid s_1, \ldots, s_{T-1})}$$

« *Monde statique* » : toutes les mesures sont *conditionnellement indépendantes* si on connaît la valeur d'une cellule de la GO (ce qui est *faux* en pratique et produit des limitations de la méthode)

1. Construction d'une GO

- Notre modèle de capteur nous donne $p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)$, alors nous le faisons apparaître (à nouveau, Théor. de Bayes) :

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = \frac{p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)\, p(s_T)}{p(\mathrm{occ}_i)} \frac{p(\mathrm{occ}_i^{T-1})}{p(s_T \mid s_1, \ldots, s_{T-1})}$$

- Mais la probabilité d'«*inoccupation*» $p(\overline{\mathrm{occ}}_i) = 1 - p(\mathrm{occ}_i)$
- La probabilité que la cellule i soit vide est donc :

$$p(\overline{\mathrm{occ}}_i^T) = \frac{p(\overline{\mathrm{occ}}_i \mid s_T)\, p(s_T)}{p(\overline{\mathrm{occ}}_i)} \frac{p(\overline{\mathrm{occ}}_i^{T-1})}{p(s_T \mid s_1, \ldots, s_{T-1})}$$

1. Construction d'une GO

- Le rapport des deux probabilités nous donne :

$$\frac{p(\mathrm{occ}_i^T)}{p(\overline{\mathrm{occ}}_i^T)} = \frac{p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)}{p(\overline{\mathrm{occ}}_i \mid s_T)} \frac{p(\overline{\mathrm{occ}}_i^{T-1})}{p(\mathrm{occ}_i^{T-1})} \frac{p(\overline{\mathrm{occ}}_i)}{p(\mathrm{occ}_i)}$$

- En sachant que $p(\overline{\mathrm{occ}}_i) = 1 - p(\mathrm{occ}_i)$, tout est connu :

$$\frac{p(\mathrm{occ}_i^T)}{1 - p(\mathrm{occ}_i^T)} = \frac{p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)}{1 - p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)} \frac{1 - p(\mathrm{occ}_i^{T-1})}{p(\mathrm{occ}_i^{T-1})} \frac{1 - p(\mathrm{occ}_i)}{p(\mathrm{occ}_i)}$$

- Nous pourrions exprimer $p(\mathrm{occ}_i^T)$, mais il est plus simple déterminer la quantité :

$$\ell_i^T = \log\left(\frac{p(\mathrm{occ}_i^T)}{1 - p(\mathrm{occ}_i^T)}\right)$$

$\log(\,\cdot\,)$: logarithme naturel (de base e)

1. Construction d'une GO

- Ce qui se calcule simplement par (rappel : $\log(x^b) = b \log(x)$ et $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$)

$$\ell_i^T = \log\left(\frac{p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)}{1 - p(\mathrm{occ}_i \mid s_T)}\right) - \ell_i^{T-1} + \log\left(\frac{1 - p(\mathrm{occ}_i)}{p(\mathrm{occ}_i)}\right)$$

- Mise à jour *incrémentale* de ℓ_i^T. On utilise :
  - Les valeurs précédentes
  - Le modèle de capteur
- $p(\mathrm{occ}_i)$ généralement initialisée à ½ (l'initialisation intègre l'*a priori* sur le fait que l'environnement contienne plus ou moins d'obstacles)
- ℓ_i^T permet de calculer la probabilité d'occupation $p(\mathrm{occ}_i^T)$:

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(\ell_i^T)}$$

1. Construction d'une GO

- Autres options pour la mise à jour de la GO
  1. Calcul de $p(\text{occ}_i^T)$ en fonction du nombre de perceptions de la cellule i (« approche fréquentiste *vs* approche bayésienne »)

$$p(\text{occ}_i^T) = \frac{\text{nbocc}_i^T}{\text{nbvide}_i^T + \text{nbocc}_i^T}$$

Nombre de fois que la cellule i a été détectée *vide* (sur les T mesures)

Nombre de fois que un obstacle a été détecté dans la cellule i (sur les T mesures)

1. Construction d'une GO

- Autres options pour la mise à jour de la GO

2. *Histogramic in-motion mapping* (HIMM)

$$p(\mathrm{occ}_i^T) = p(\mathrm{occ}_i^{T-1}) + \lambda\kappa$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si la cellule } i \text{ présente un obstacle} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Valeur d'incrémentation (paramètre positif)

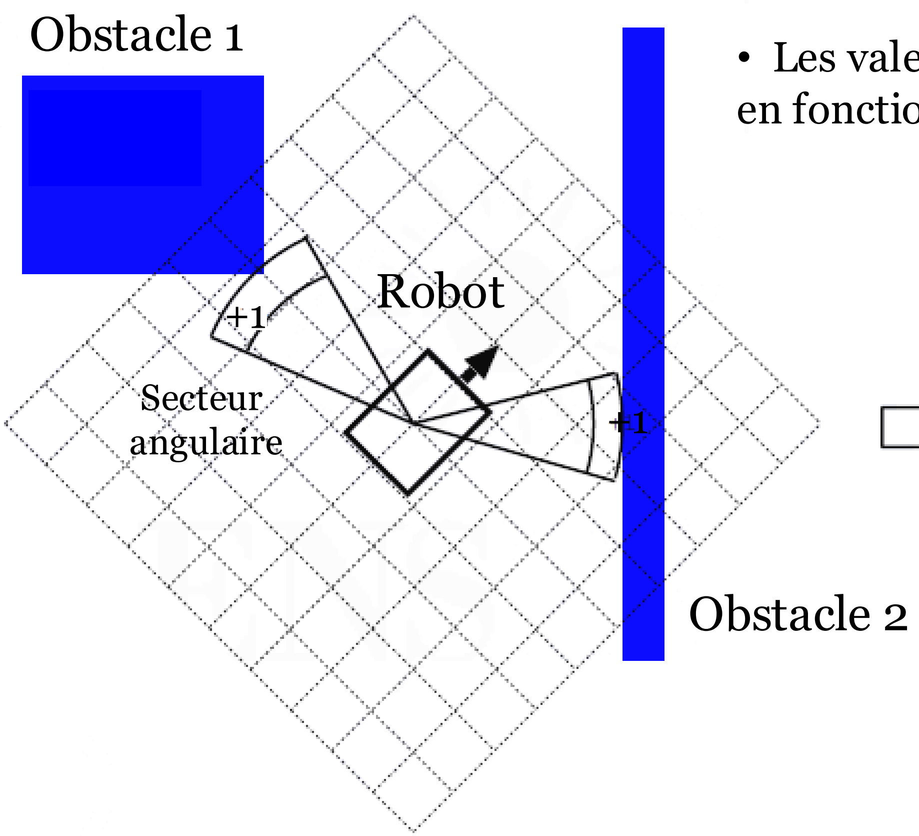
L'HIMM est très simple, mais :

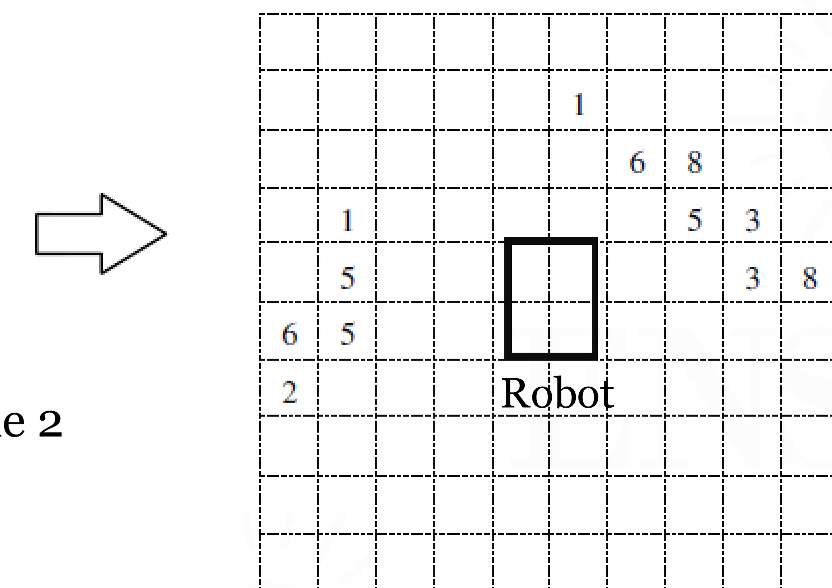
- Pas de convergence si le nombre de perceptions tend vers l'infini
- Sensible au bruit
- Réglage délicat des paramètres (κ) pour être adapté à un robot

"*Histogramic in-motion Mapping for Mobile Robot Obstacle Avoidance*", J. Borenstein, Y. Koren, IEEE Journal of Robotics and Automation, vol. 7, n. 4, pp. 535-539, 1991

2. Histogramme d’occupation

- La GO est construite dans le *référentiel du robot*
- Un compteur est incrémenté pour chaque cellule appartenant au *secteur angulaire* dans lequel un obstacle a été détecté (ex. pour une probabilité > 1/2)
- Les valeurs sont déplacées d’une cellule à l’autre en fonction des déplacements du robot

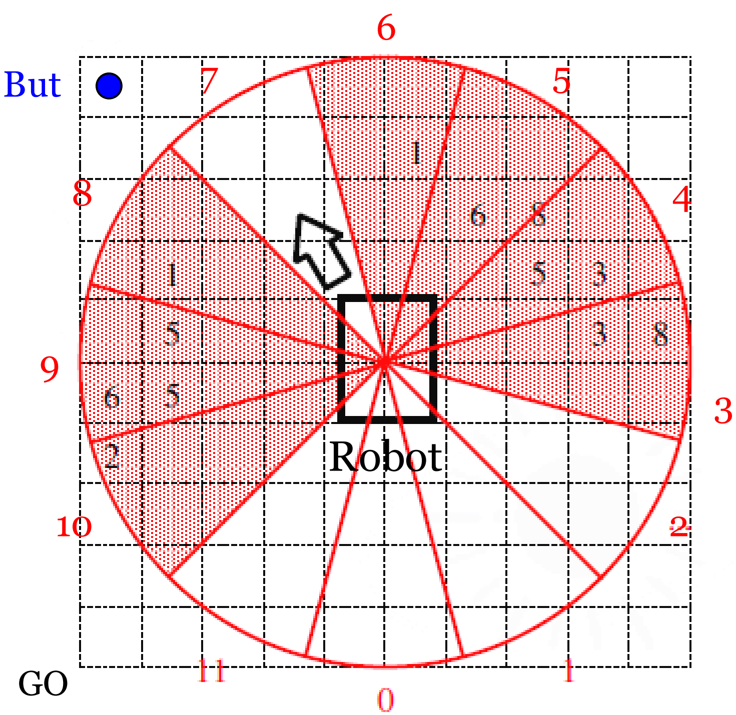




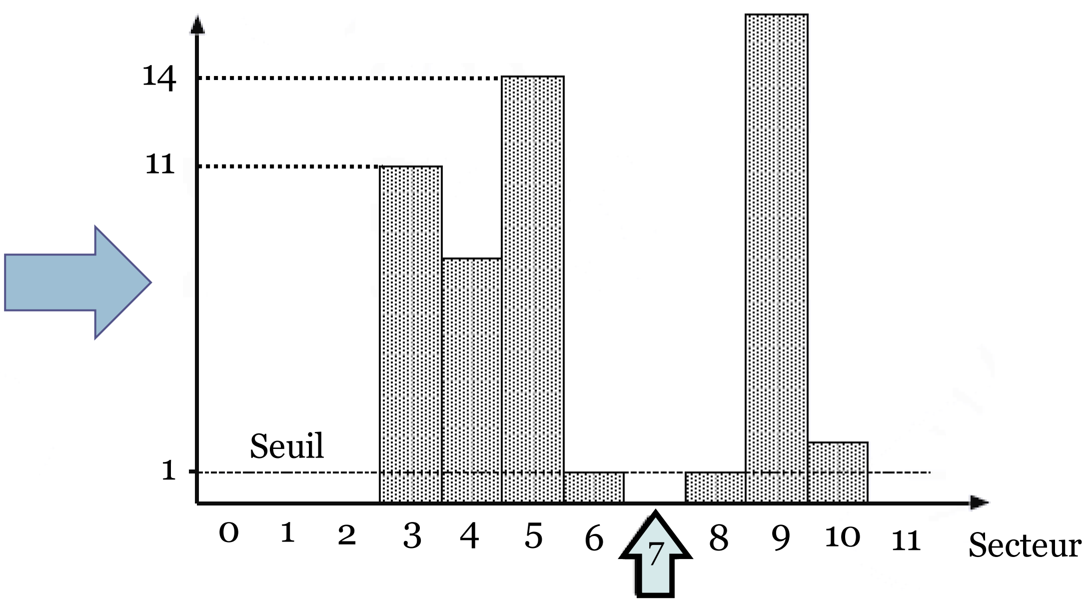
2. Histogramme d'occupation

- Construction d'un *histogramme polaire* des obstacles à partir des valeurs des cellules (une barre verticale pour chaque secteur)
- On utilise l'histogramme pour déterminer la direction de déplacement du robot
- Seuillage pour éliminer une partie du bruit

12 secteurs (ouverture angulaire de 30º)



Somme des compteurs des cellules dans les secteurs



Direction sans collisions (et vers le but)

2. Histogramme d'occupation

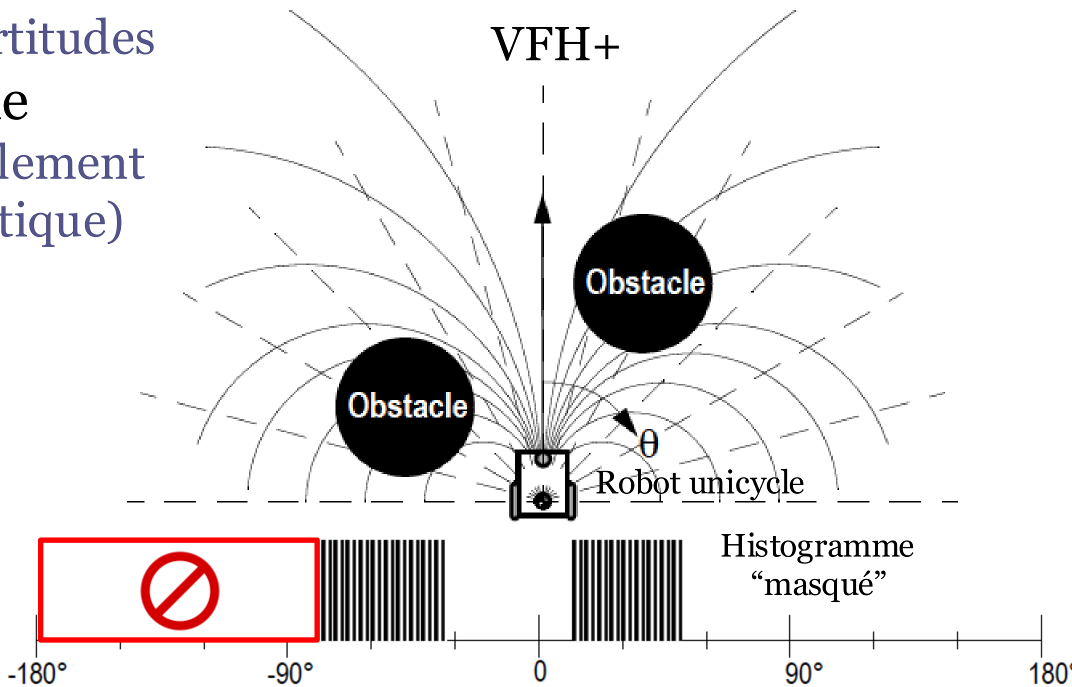
- Après seuillage
  - Ensemble de directions possibles (« vallées candidates »)
  - Choix selon un critère :
    - *Exemple* : direction la plus proche de celle du but
    - On peut prendre en considération le *modèle cinématique* (VFH+) et la *taille physique* du robot (VFH*)

Avantages du VFH

Très rapide, robuste aux incertitudes

Problème : planification locale

Chemins non optimaux globalement (mais *quasi optimaux*, en pratique)



"*VFH+: Reliable obstacle avoidance for fast mobile robots*", I. Ulrich, J. Borenstein, in Proc. Int. Conf. Robotics and Autom., pp. 1572-1577, 1998

"*VFH*: Local Obstacle Avoidance with Look-Ahead Verification*", I. Ulrich, J. Borenstein in Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Autom., pp. 2505-2511, 2000