

Localisation et navigation de robots

UPJV, Département EEA

M2 3EA, EC32, parcours RoVA

Année Universitaire 2025-2026

Fabio MORBIDI

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: fabio.morbidi@u-picardie.fr

Mercredi et Jeudi 9h30-12h00,
salle CURI 8 ou 305 : CM & TD
Jeudi, salle TP204 : TP



Electronique

Energie Electrique

Automatique



Plan du chapitre

Stratégies de navigation

Partie 1

Architectures de contrôle

Partie 2

Navigation vers un but

Partie 3

Planification de trajectoire
et évitement d'obstacles

Partie 4

Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d'obstacles

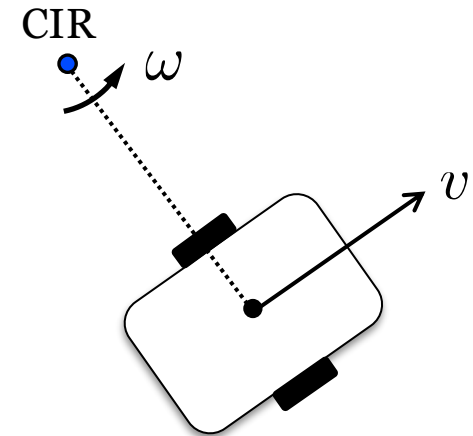
3. Fenêtre dynamique

Fenêtre dynamique

- Sélection d'un couple (v, ω)
 - v : vitesse longitudinale du robot
 - ω : vitesse angulaire du robot

selon des contraintes :

- Evitement d'obstacles
- Atteindre un but
- Modèle cinématique/dynamique du robot



Robot unicycle

"The dynamic window approach to collision avoidance", D. Fox, W. Burgard, S. Thrun, IEEE Robot. & Autom. Magazine, vol. 4, n. 1, pp. 23-33, 1997

"High-speed navigation using the global dynamic window approach", O. Brock, O. Khatib, in Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp. 341-346, vol. 1, 1999

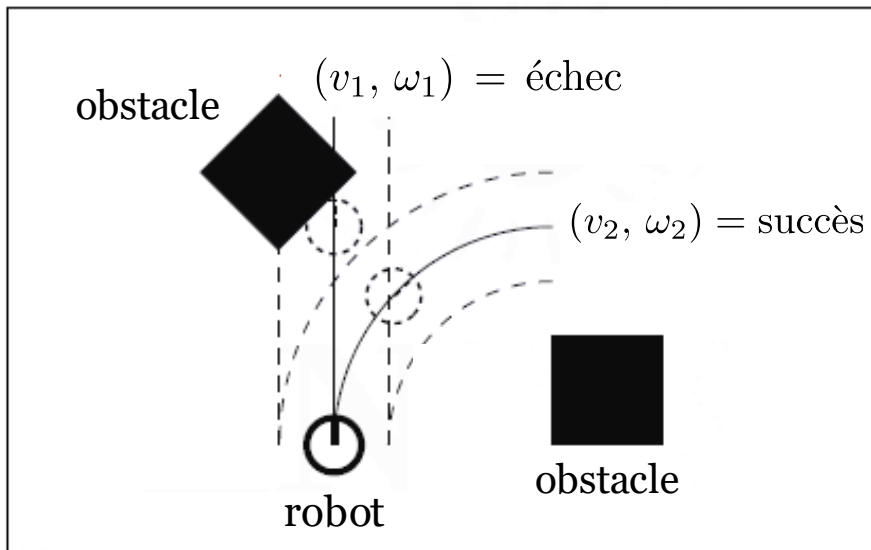
Fenêtre dynamique

- Contrainte principale : *évitement d'obstacles*
 - Contrainte dure
 - Binaire : succès/échec
 - Elle doit être obligatoirement satisfaite
 - Évaluation :
 - À partir de l'environnement perçu
 - À partir de la position future *estimée* du robot

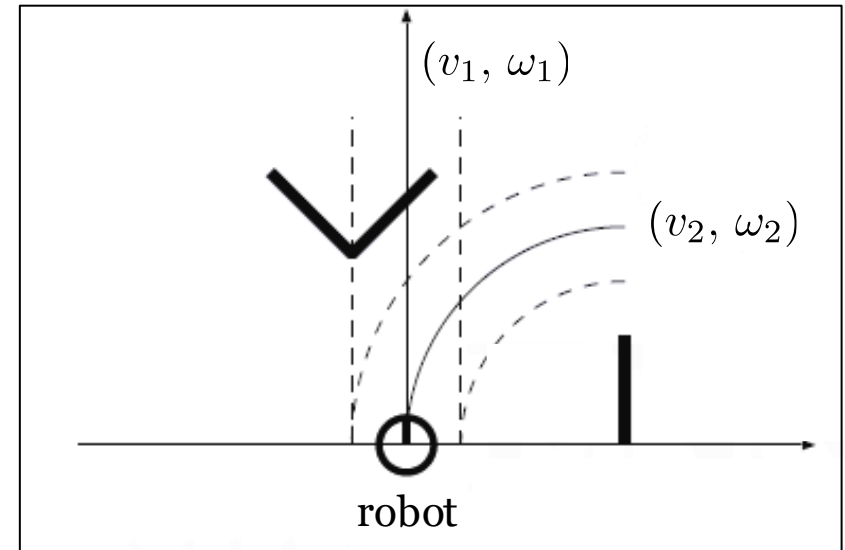
Fenêtre dynamique

- Illustration de la contrainte d'évitement d'obstacles

Environnement réel



Perceptions du robot



Fenêtre dynamique

- Construction du *graphe des vitesses*
 - Ensemble des couples de vitesse (et donc des trajectoires) possibles du robot
- Dans ce graphe, on peut tracer la *fenêtre des vitesses accessibles* au prochain pas de temps :

$$V_d = \{(v, \omega) \mid v \in [v_a - \dot{v}t, v_a + \dot{v}t] \text{ et } \omega \in [\omega_a - \dot{\omega}t, \omega_a + \dot{\omega}t]\}$$

où

t : intervalle de temps pendant lequel les accélérations linéaires et angulaires $(\dot{v}, \dot{\omega})$ du robot seront appliquées

(v_a, ω_a) : vitesse courante du robot

Remarque :

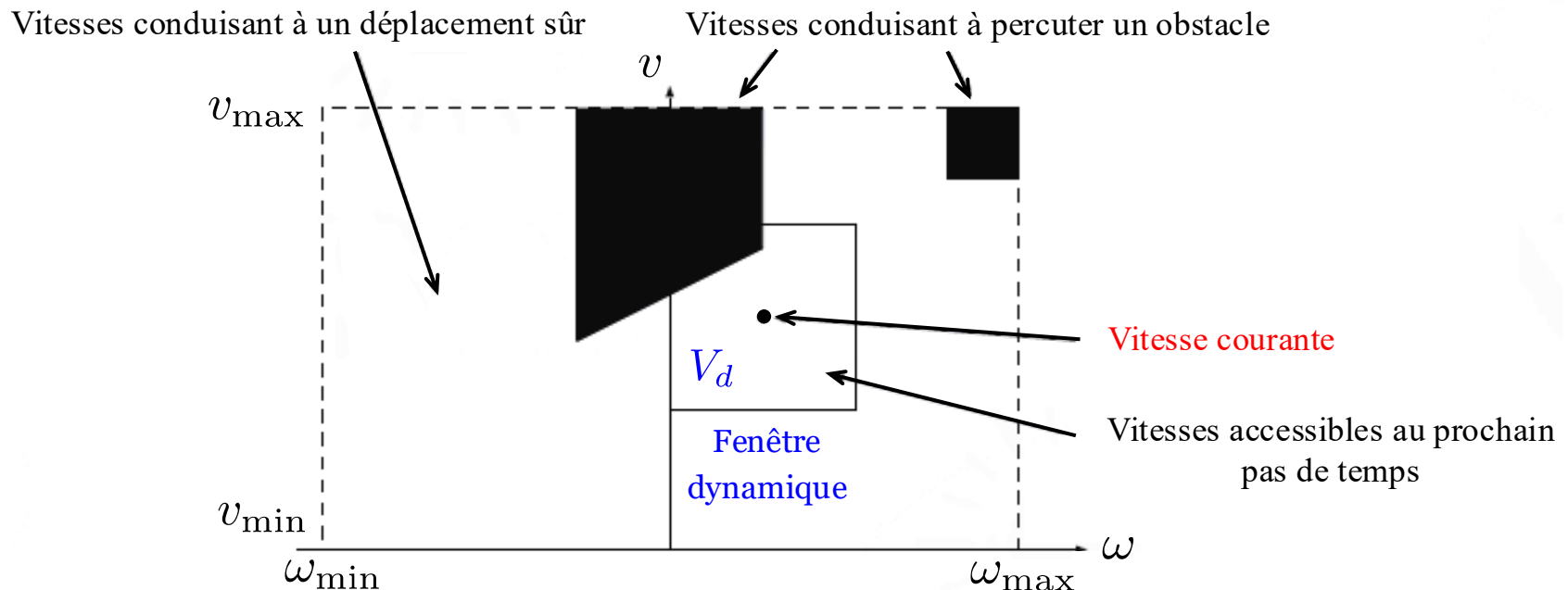
La **fenêtre dynamique** V_d est centrée sur la vitesse courante du robot et elle contient les vitesses du robot accessibles dans le **prochain intervalle de temps**

Fenêtre dynamique

- Fenêtre dynamique

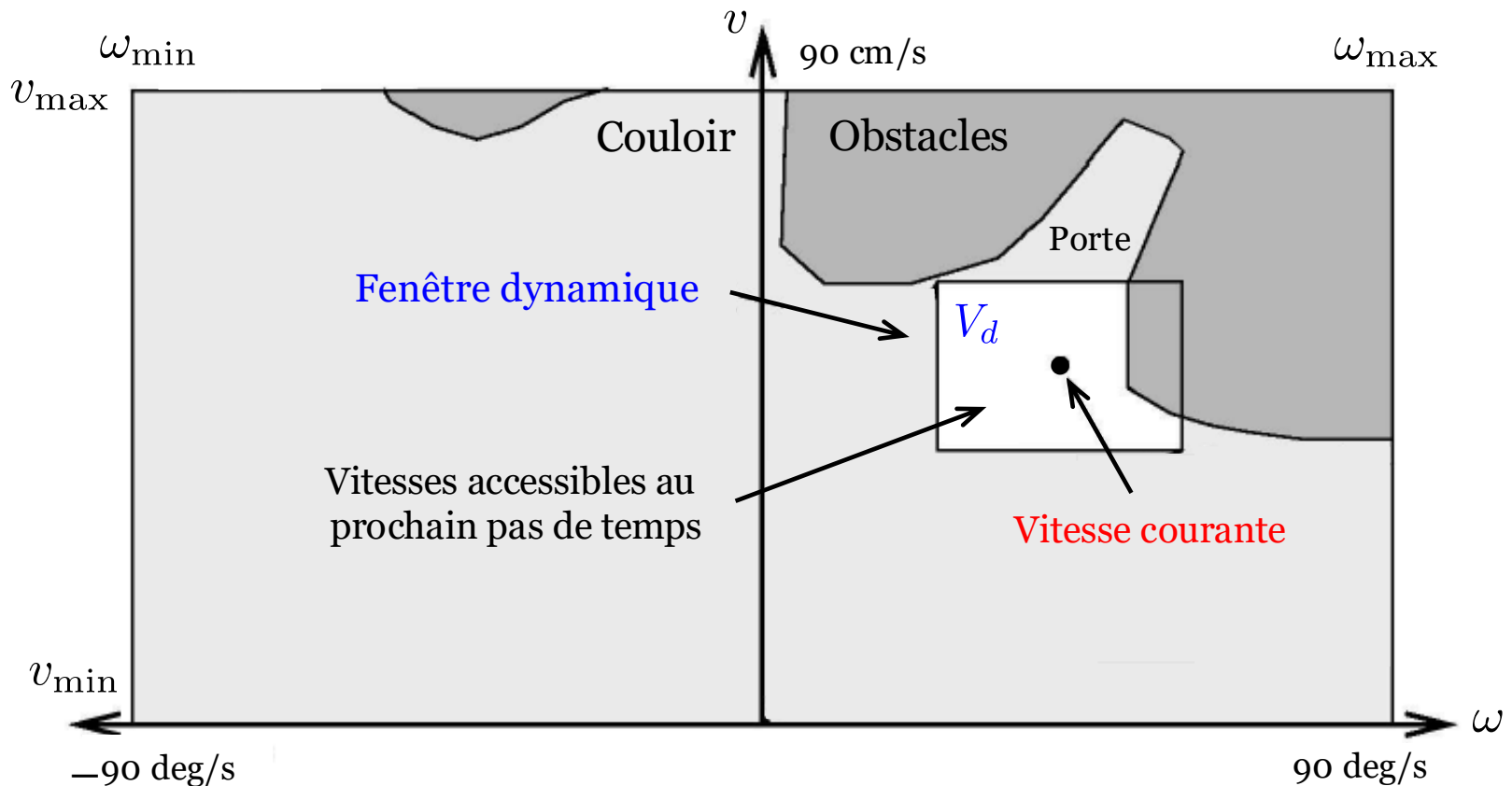
$$V_d = \{(v, \omega) \mid v \in [v_a - \dot{v}t, v_a + \dot{v}t] \text{ et } \omega \in [\omega_a - \dot{\omega}t, \omega_a + \dot{\omega}t]\}$$

Exemple :



Fenêtre dynamique

- Fenêtre dynamique pour le robot RHINO B21 de *Real World Interface*, avec un système synchro-drive à 3 roues [Fox *et al.*, RAM'97]
 - Max vitesse de translation du robot : 95 cm/s



Fenêtre dynamique

- Fenêtre
 - Prise en compte des obstacles
 - Choix d'un couple (v, ω) conduisant à un déplacement sûr
 - *Problème* : grande nombre de couples de vitesses possibles dans la fenêtre dynamique
- Solution possible
 - Ajout de *contraintes souples* : fonction de coût $G(v, \omega)$ à optimiser
 - Expression de *préférences* dans l'espace des vitesses accessibles

Fenêtre dynamique

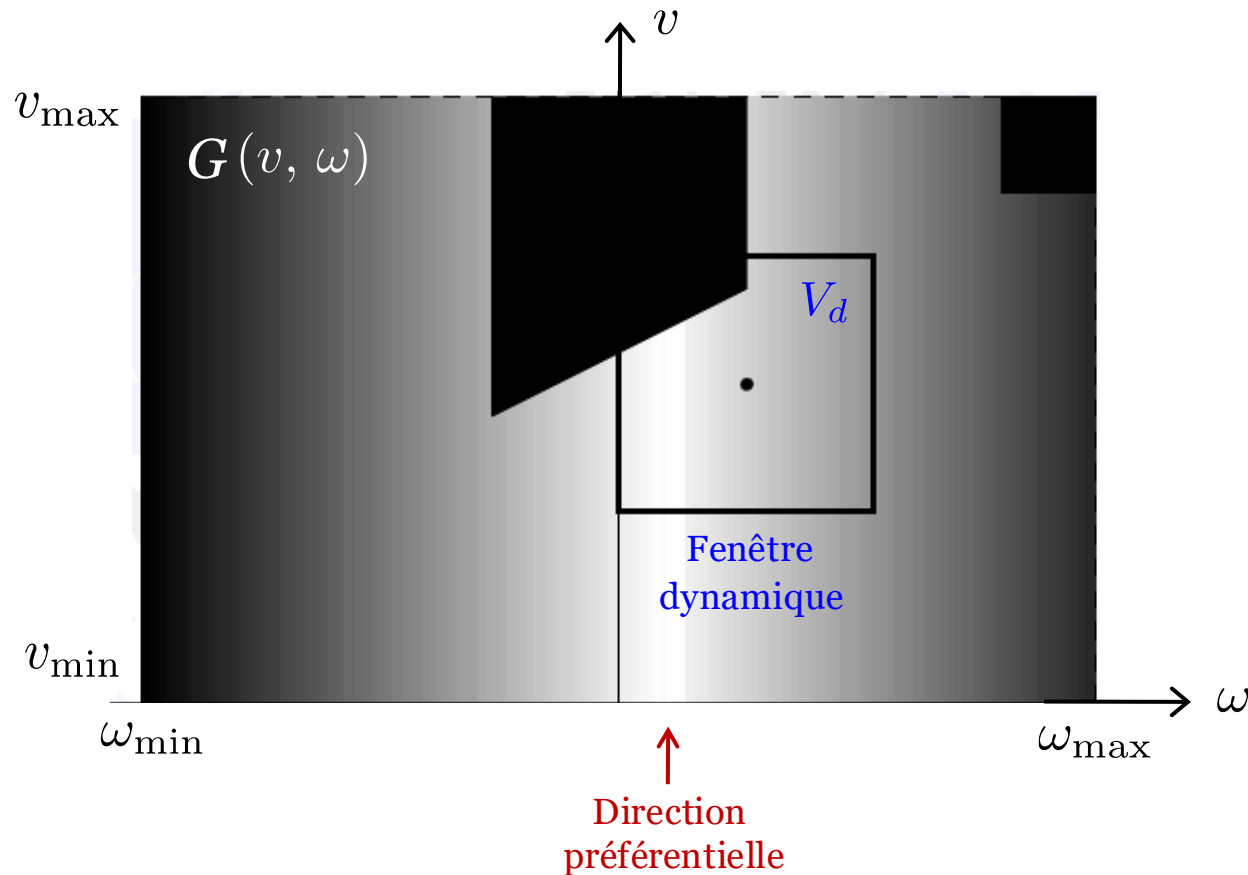
- Coût : $G(v, \omega) = \sigma[\alpha \text{ heading}(v, \omega) + \beta \text{ dist}(v, \omega) + \gamma \text{ vel}(v, \omega)]$
 - Somme de trois termes :
 1. Préférence de *direction* (« heading ») : utile si nous avons une estimation de la direction d'un but à long terme
 2. Préférence sur l'*éloignement maximal des obstacles*
 3. Préférence a priori sur les *vitesse*s (longitudinales)

La fonction $\sigma[\cdot]$ lisse la somme pondérée des trois termes (pour garantir plus d'espace latéral libre par rapport aux obstacles) et α, β, γ sont trois gains positifs

- Le couple (v, ω) dans la fenêtre dynamique V_d qui *maximise* le coût $G(v, \omega)$ est alors choisi
- Ce couple garantit l'évitement d'obstacles (contrainte dure) **et** les contraintes souples

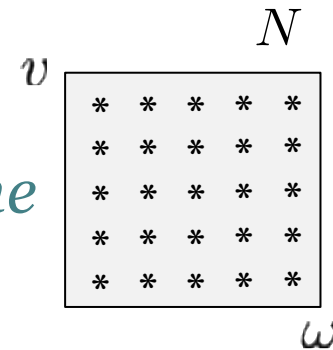
Fenêtre dynamique

- Exemple de contrainte souple
 - Préférence directionnelle : $G(v, \omega) = \alpha \text{ heading}(v, \omega)$



Fenêtre dynamique

- En pratique :
 - Evaluation des contraintes en N points du *graphe des vitesses* (c'est-à-dire, sur une grille)
 - La valeur de N dépend des ressources de calcul disponibles et de la complexité des contraintes
 - Utilisation intéressante pour :
 - Robots rapides
 - Robots à forte accélération/décélération



} Déplacement
sûr et régulier

“*High-speed navigation using the global dynamic window approach*”, O. Brock, O. Khatib, in Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp. 341-346, vol. 1, 1999

- Carte de 30 m × 30 m de l'environnement avec une résolution de 5 cm
- Fréquence de commande : supérieure à 15 Hz
- Vitesse longitudinale moyenne du robot : supérieure à 1 m/s

Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d'obstacles

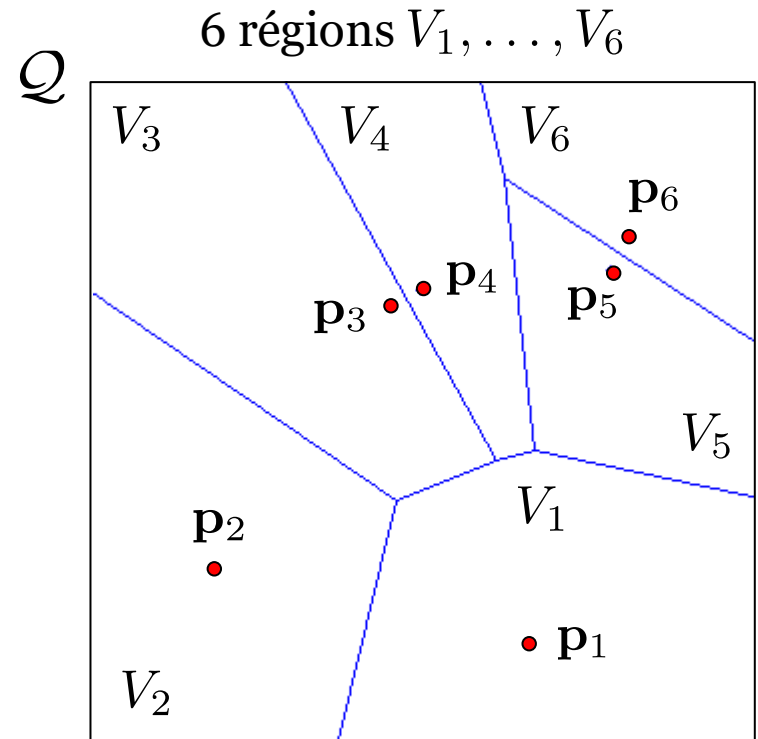
4. Graphe de Voronoï

Graphe de Voronoï

- Soit un ensemble de n points différents p_i (appelés *générateurs* ou *germes*) dans un environnement $Q \subset \mathbb{R}^2$
- Le diagramme de Voronoï partitionne Q en régions

$$V_i, i \in \{1, \dots, n\}$$

les plus proches de
chaque point p_i



Georgy F. Voronoï (1868-1908)
mathématicien russe



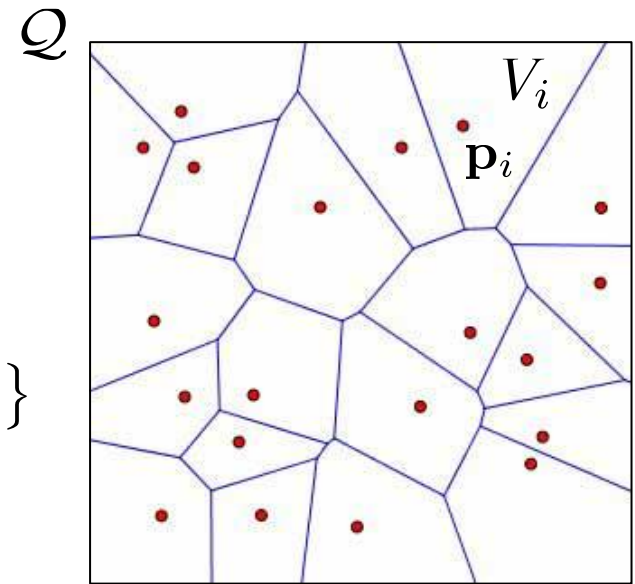
Graphe de Voronoï

- Plus formellement, la région V_i est définie par :

$$V_i = \{ \mathbf{z} \in \mathcal{Q} \mid \| \mathbf{z} - \mathbf{p}_i \|_2 \leq \| \mathbf{z} - \mathbf{p}_j \|_2, \forall j \neq i \}$$

où $\| \cdot \|_2$ indique la norme Euclidienne

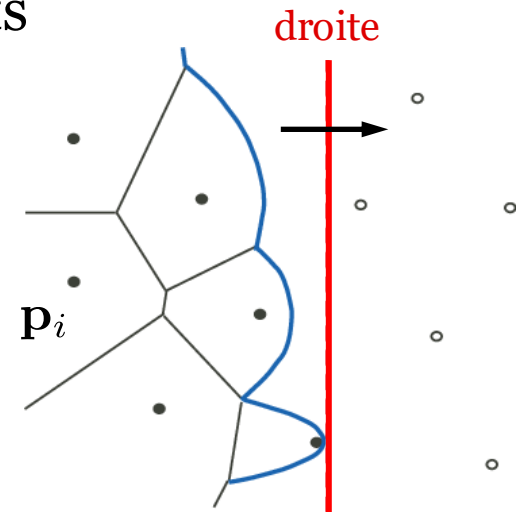
- Le *diagramme de Voronoï* est l'ensemble des régions $\{V_1, \dots, V_n\}$
- Le **graphe de Voronoï** est défini par la *frontière* des régions V_1, \dots, V_n (bleue dans la figure)



Exemple Matlab :
Plot_Voronoi.m

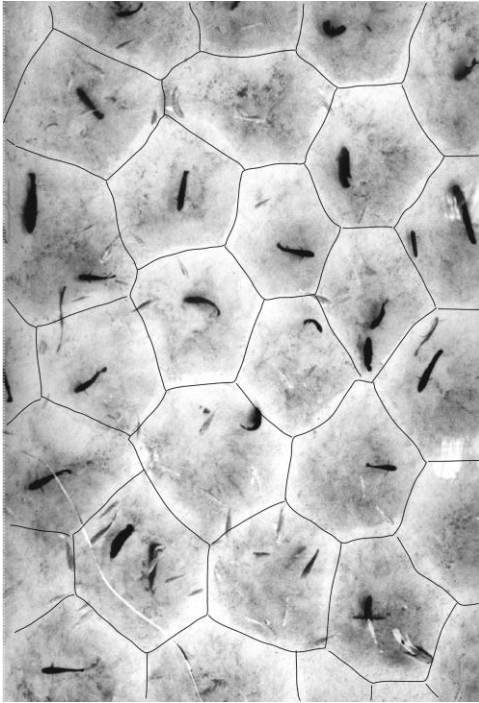
Graphe de Voronoï

- Plusieurs algorithmes existent pour le calcul du diagramme de Voronoï d'un ensemble de n points
- **L'algorithme de Fortune** est un *algorithme de balayage* (« sweepline ») : une droite balaie les points dans une certaine direction, l'algorithme met à jour la construction, et lorsque tous les points ont été balayés, le diagramme est construit
- Complexité de l'algorithme de Fortune :
 - $O(n \log n)$ en temps
 - $O(n)$ en espace mémoire



“Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations“, S. Fortune,
Ch. 27 du Handbook of Discrete and Computational Geometry,
3rd ed., CRC press, 2018

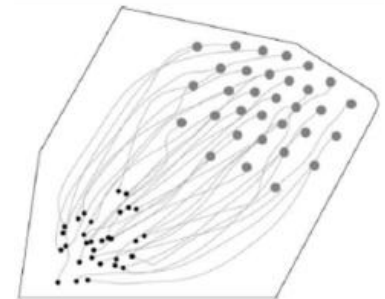
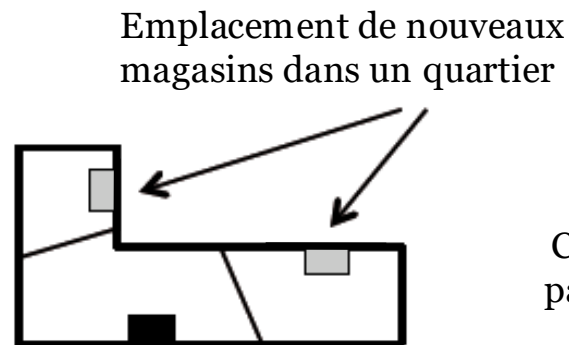
Graphe de Voronoï : exemples et applications



- Le poisson *Tilapia mossambica* crée des diagrammes de Voronoï au cours du processus d'élevage des petits (voir l'image à gauche)
- Les diagrammes de Voronoï sont utilisés dans plusieurs domaines (biologie, géographie, hydrologie, reconnaissance des formes, infographie, recherche opérationnelle, etc.) et pour de nombreuses applications :
 - Localisation de nouvelles installations
 - Couverture optimale d'une région limitée



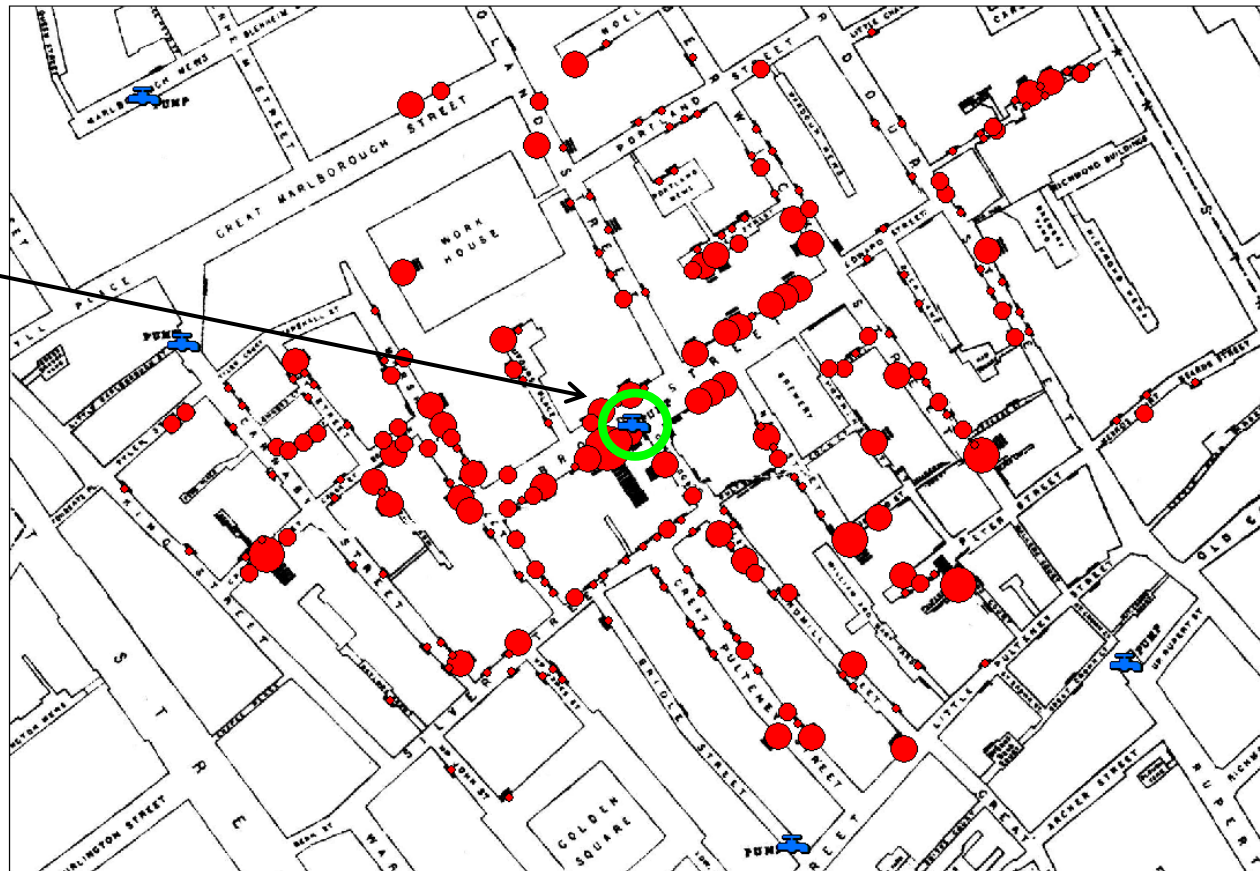
Salar d'Uyuni, lac salé en Bolivie (3700 m)



Couverture d'une région par une cohorte de robots
[Cortés *et al.*, TRA'04]

Graphe de Voronoï : exemples et applications

Pompe d'eau infecte entre Broad Street et Cambridge Street à Londres



Le médecin John Snow utilisa un diagramme de Voronoï pour montrer que la majorité des personnes décédées à Londres suite à l'épidémie de choléra de 1854 (disques rouges), vivait plus près d'une pompe d'eau infecte (cercle vert) que de toutes les autres pompes (bleues)

Graphe de Voronoï : extensions

- a) Diagramme de Voronoï 3D
- b) Diagramme de Voronoï généralisé défini à partir de générateurs de dimension 1 ou 2 (*segments de droite ou surfaces*)
- c) Diagramme de Voronoï d'étendue r : chaque région de Voronoï est définie par :

$$V_{i,r} = V_i \cap \overline{B}(\mathbf{p}_i, r)$$

où $\overline{B}(\mathbf{p}_i, r) = \{\mathbf{z} \in \mathcal{Q} \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{p}_i\|_2 \leq r\}$
est un disque de rayon r centré sur \mathbf{p}_i

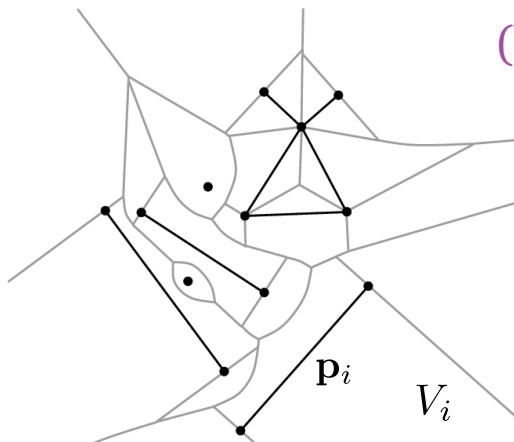
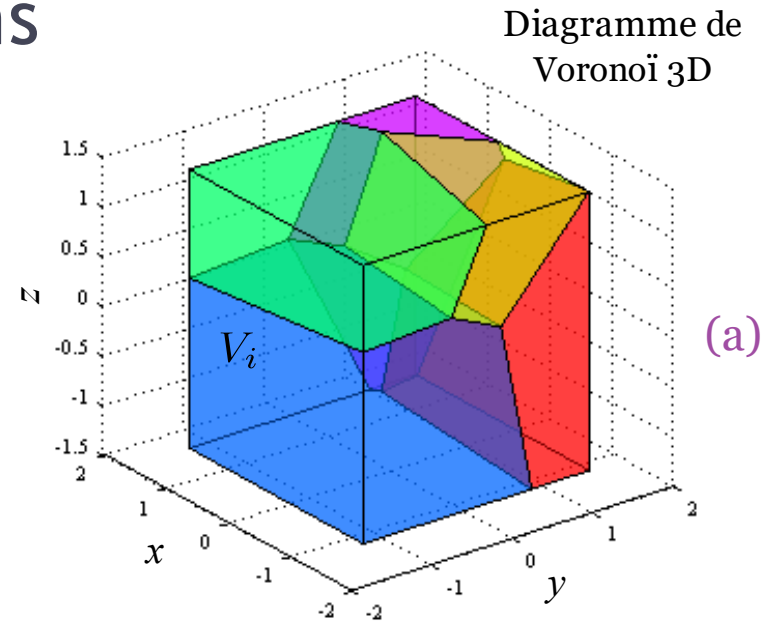


Diagramme de Voronoï :
Générateurs de dim. 1 (segments)

(b)

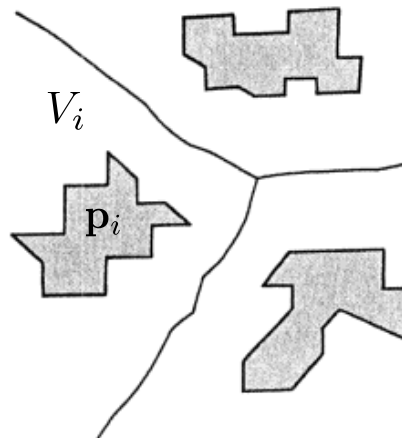


Diagramme de Voronoï :
Générateurs de dim. 2 (surfaces)

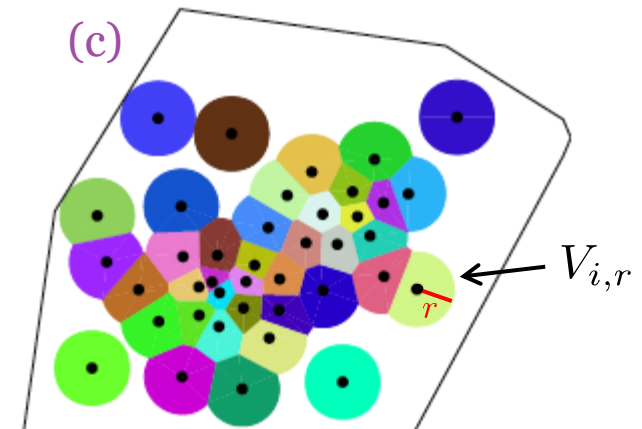
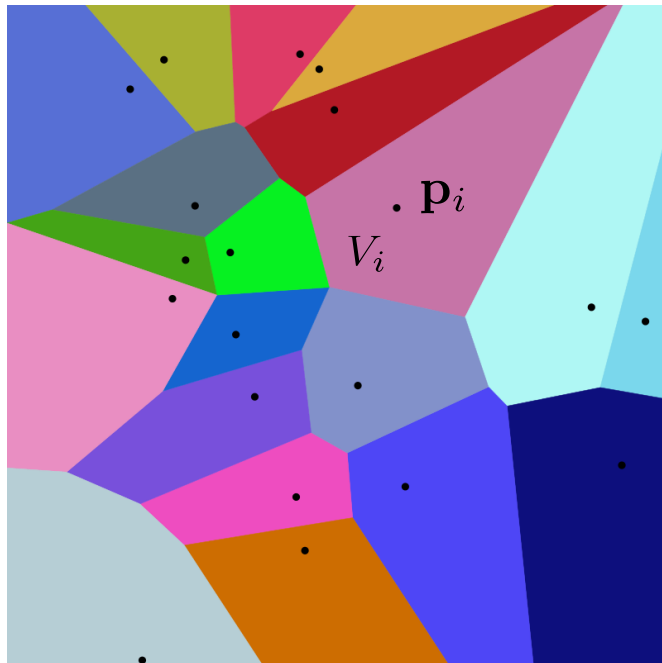


Diagramme de Voronoï
d'étendue r

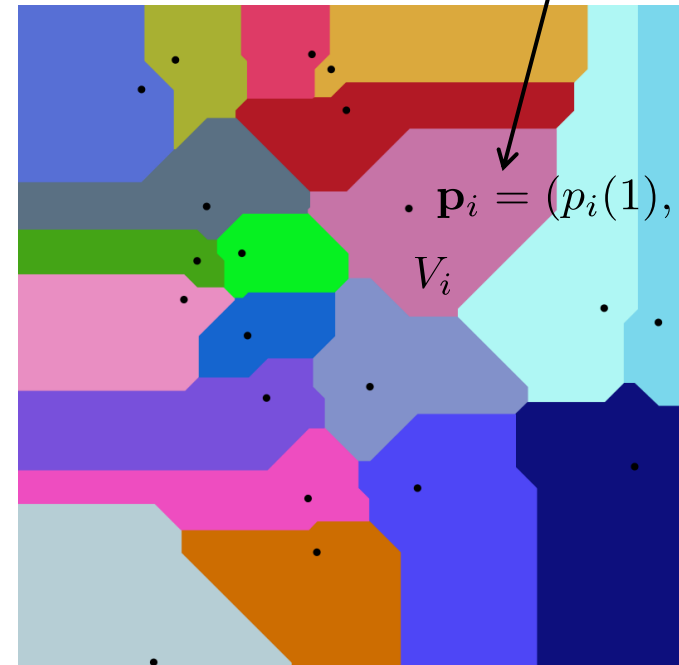
Graphe de Voronoï : extensions

- Fonctions de distance autres que la *distance euclidienne*



Distance euclidienne

$$\text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{p}_i) = \|\mathbf{z} - \mathbf{p}_i\|_2$$



Distance de Manhattan ou distance ℓ_1

$$\text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{p}_i) = \|\mathbf{z} - \mathbf{p}_i\|_1 \triangleq \sum_{j=1}^2 |z(j) - p_i(j)|$$

“*Spatial tessellations: concepts and applications of Voronoi diagrams*”, A. Okabe, B.N. Boots, K. Sugihara, S.N. Chiu, Wiley & Sons, 1992

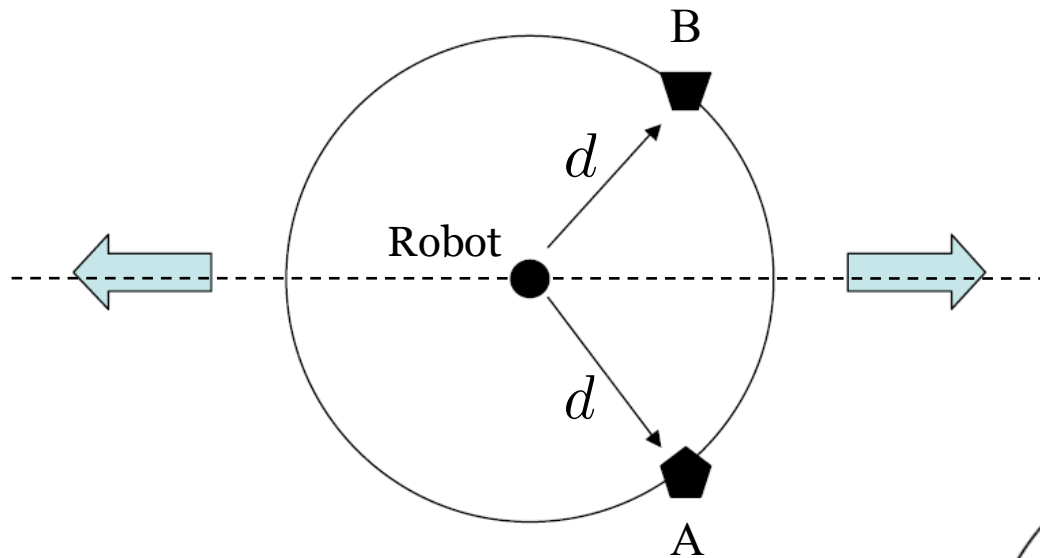
Graphe de Voronoï

Evitement d'obstacles :

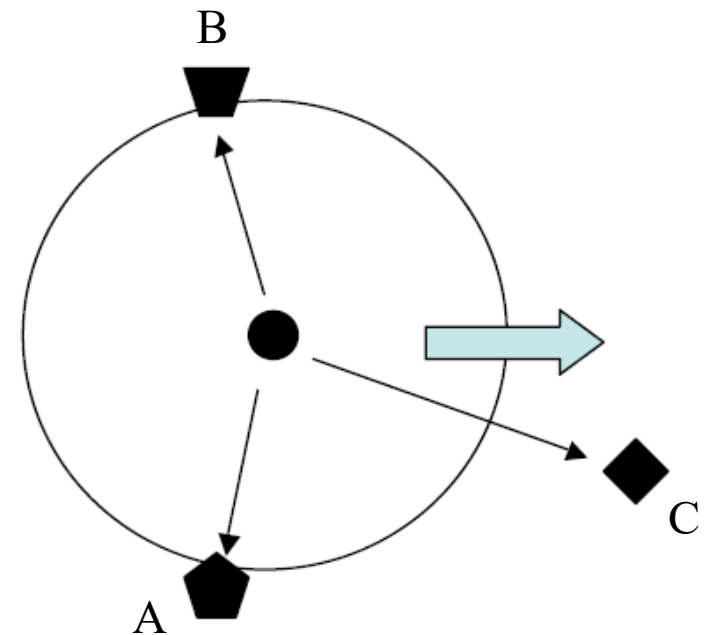
- On représente le robot par un point qui perçoit un ensemble d'obstacles (*ponctuels*) tout autour de lui
 - Distance des m obstacles les plus proches : d_1, \dots, d_m
 - Angle vers les obstacles : $\alpha_1, \dots, \alpha_m$
- Loi de contrôle du mouvement :
 - Quand 2 obstacles sont détectés : se déplacer dans la direction $\gamma = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ (suivre la *ligne médiane*)
 - Quand il y a 3 obstacles proches ou plus : définir un « lieu »

Graphe de Voronoï

- Mouvement selon une arête du graphe de Voronoï

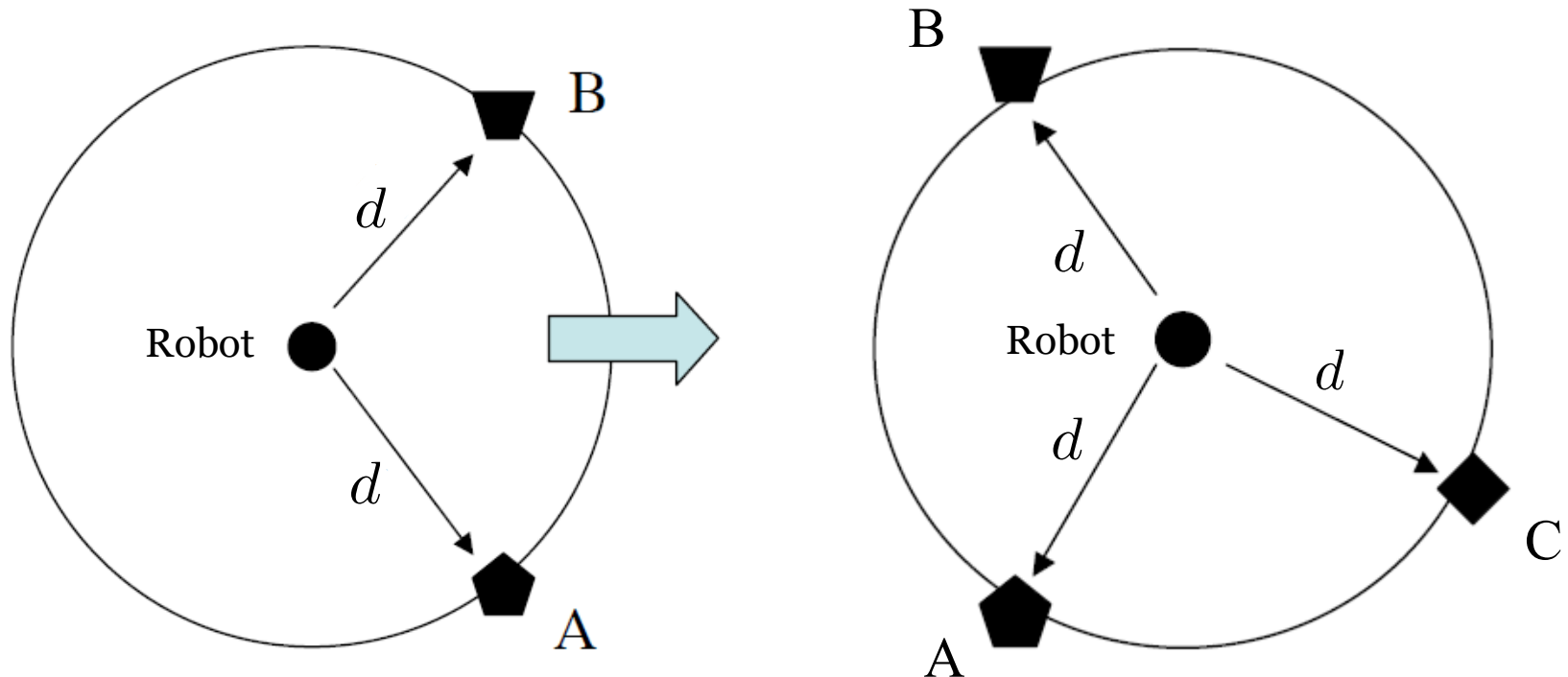


- Détection d'un troisième obstacle



Graphe de Voronoï

- Déplacement à équidistance des trois obstacles et définition d'un *lieu*



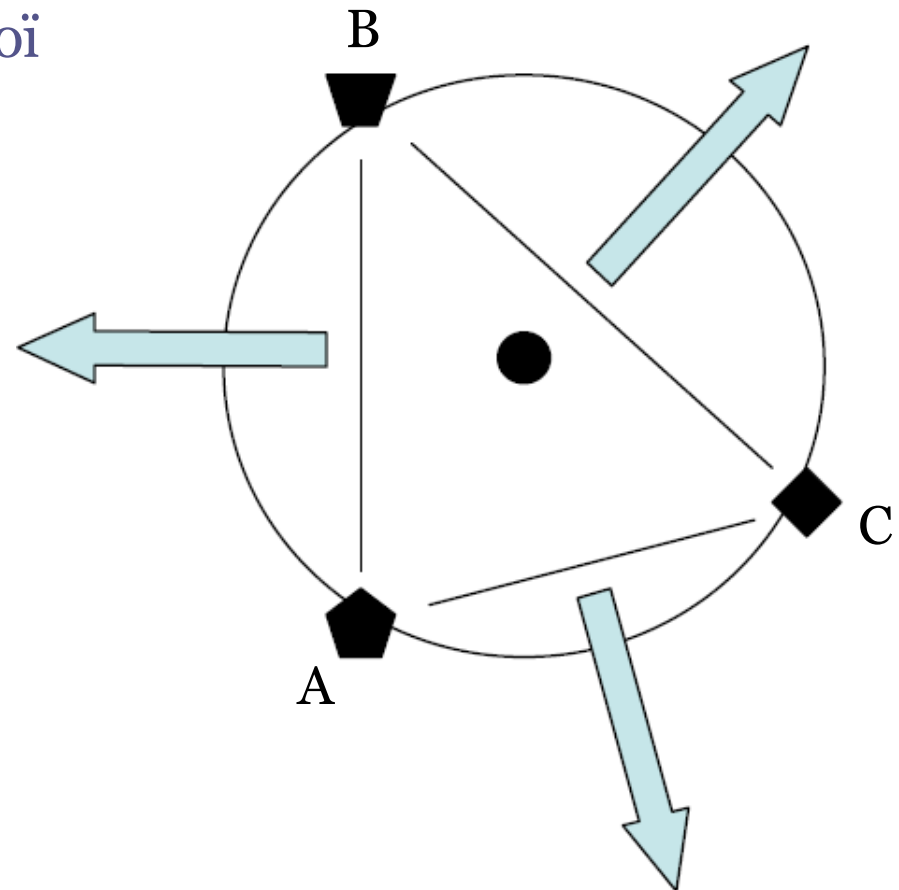
Graphe de Voronoï

Algorithme

1. On part du point q_s
2. Se déplacer en maintenant une distance égale entre les obstacles A et B : $d_A(t) = d_B(t)$
3. Sélectionner un obstacle C avec une distance $d_C(t)$ telle que : $d_C(t) = d_A(t) = d_B(t)$
 - Utiliser une *tolérance* sur l'égalité
 - Éviter les cas où ces distances ne sont jamais égales
 - Attention au cas où les (une des) distances sont égales à la *distance maximale perceptible* du robot
4. Arrêt et définition d'un *lieu*

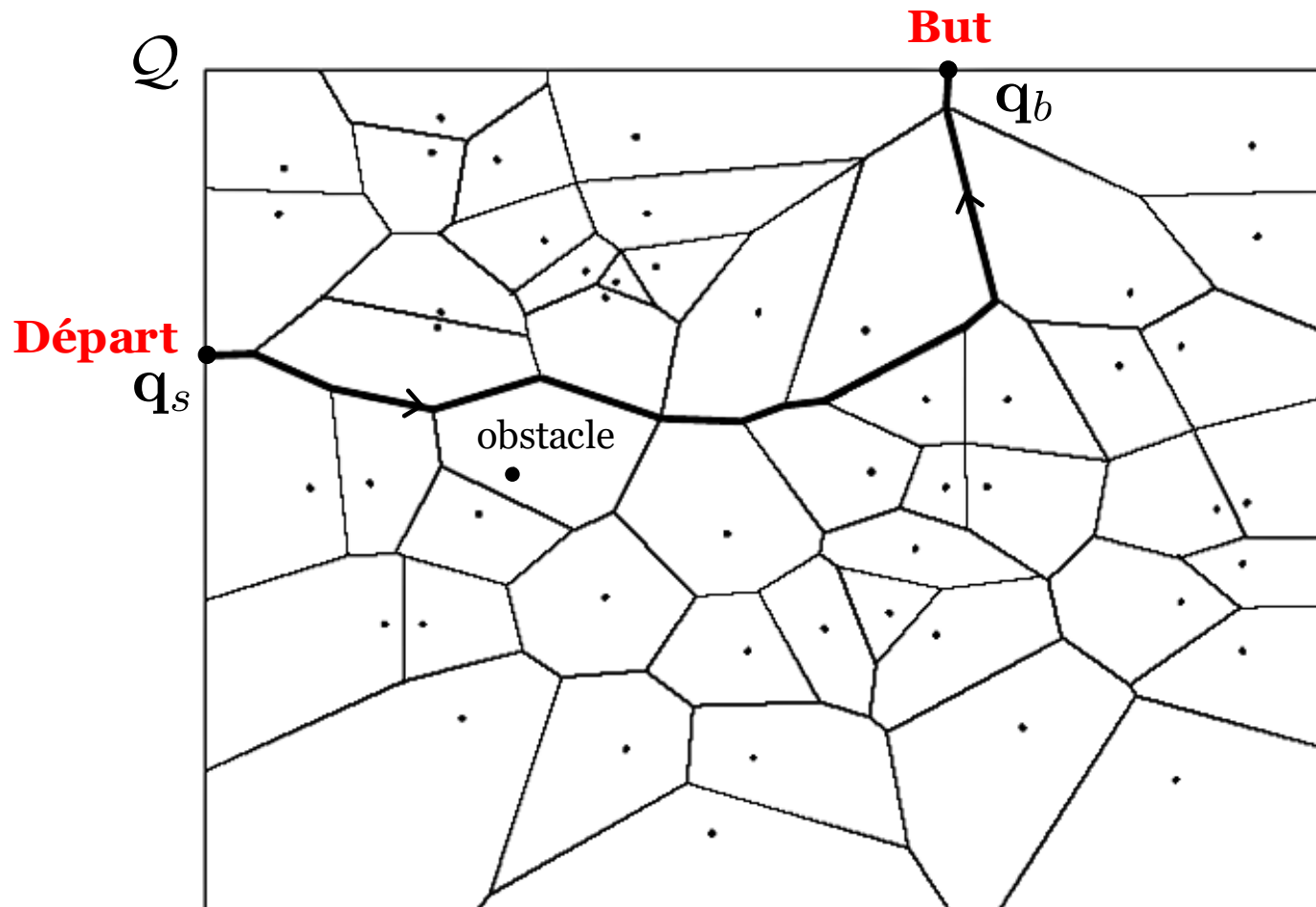
Graphe de Voronoï

5. Dès que le robot est sur un *lieu*
 - Sélectionner une arête de sortie du graphe de Voronoï (selon un certain critère)
 - Effectuer une rotation pour faire face à l'arête
6. Lancer le robot sur la nouvelle arête, et répéter la procédure précédente (« go to 3. ») jusqu'au but q_b



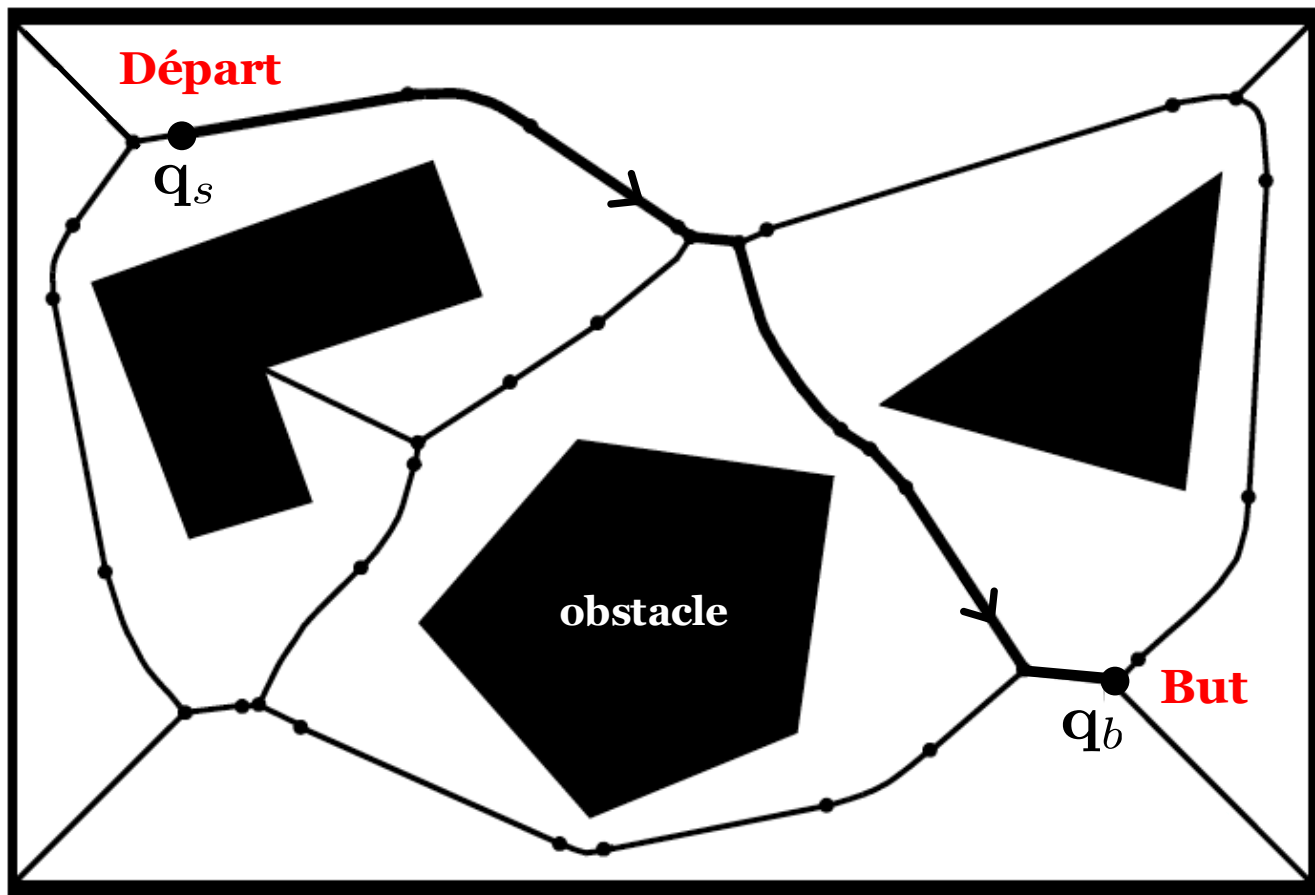
Graphe de Voronoï

- Exemple de chemin sans collisions (il n'est pas unique !)



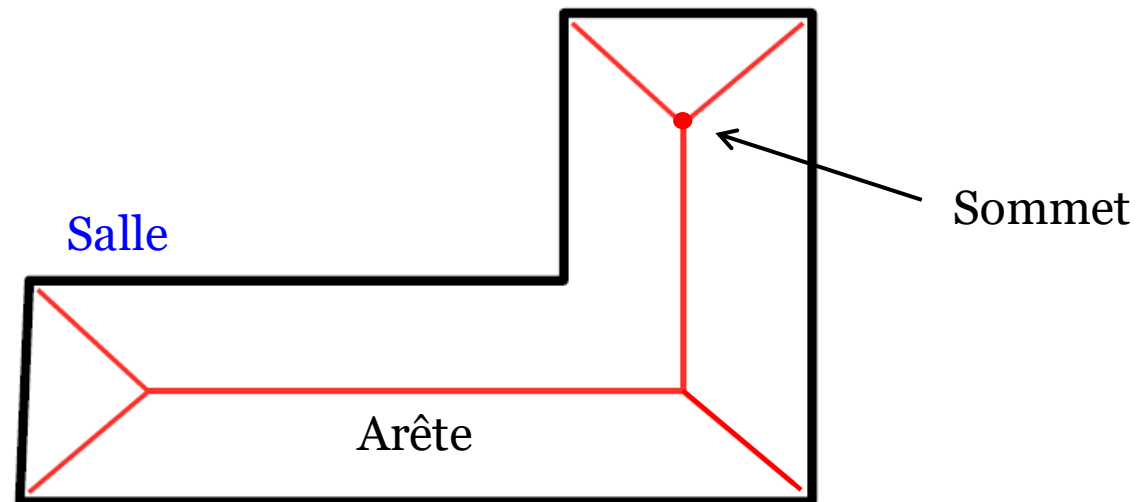
Graphe de Voronoï

- **Extension 1** : obstacles *non ponctuels* (polygones)



Graphe de Voronoï

- **Extension 2** : obstacles *non ponctuels* (par ex. les murs d'une salle)

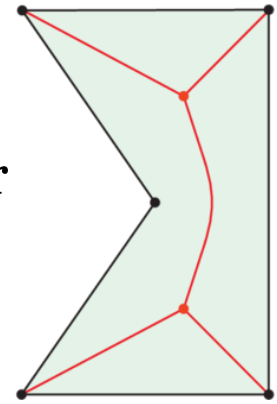
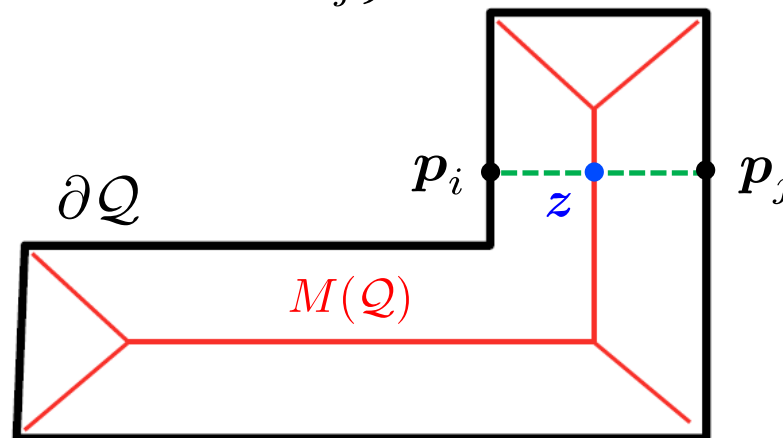


- *Arête* du graphe de Voronoï :
 - Ensembles de points équidistants de deux bordures
- *Sommet* du graphe de Voronoï :
 - Ensembles de points équidistants de trois bordures ou plus

Graphe de Voronoï

- L'**axe médian** (« *medial axis* ») permet de représenter la forme d'une région en trouvant son squelette topologique, c'est-à-dire un ensemble de courbes qui court le long du « milieu » de la région
- Soit ∂Q la frontière de l'environnement Q . L'axe médian $M(Q)$ de Q est défini par :

$$M(Q) = \left\{ z \in Q \mid \|z - p_i\|_2 = \|z - p_j\|_2 = \min_{y \in \partial Q} \|z - y\|_2, \right. \\ \left. p_i, p_j \in \partial Q, p_i \neq p_j \right\}$$



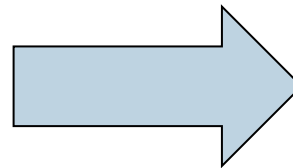
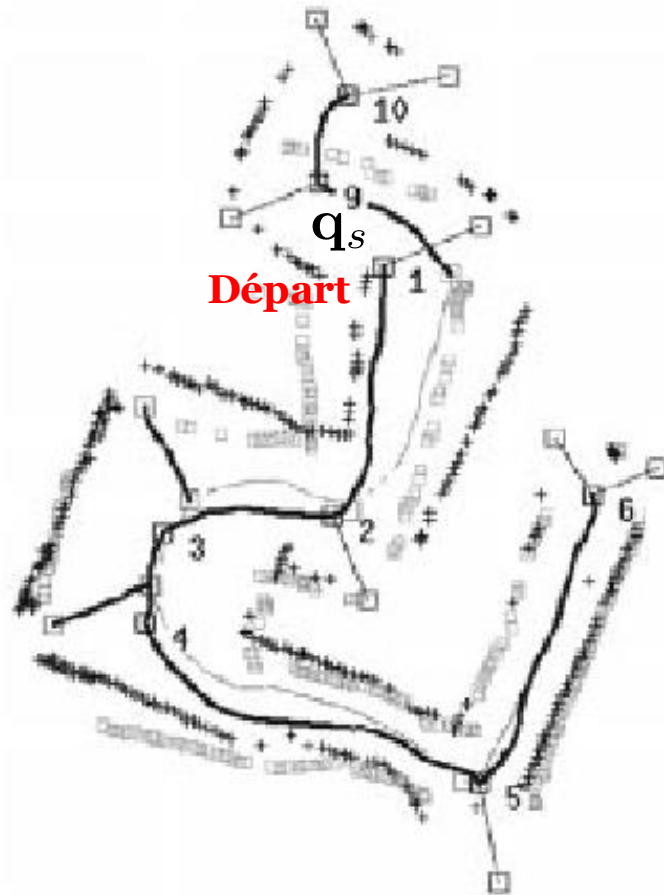
Graphe de Voronoï

Autre application du graphe de Voronoï en robotique mobile :

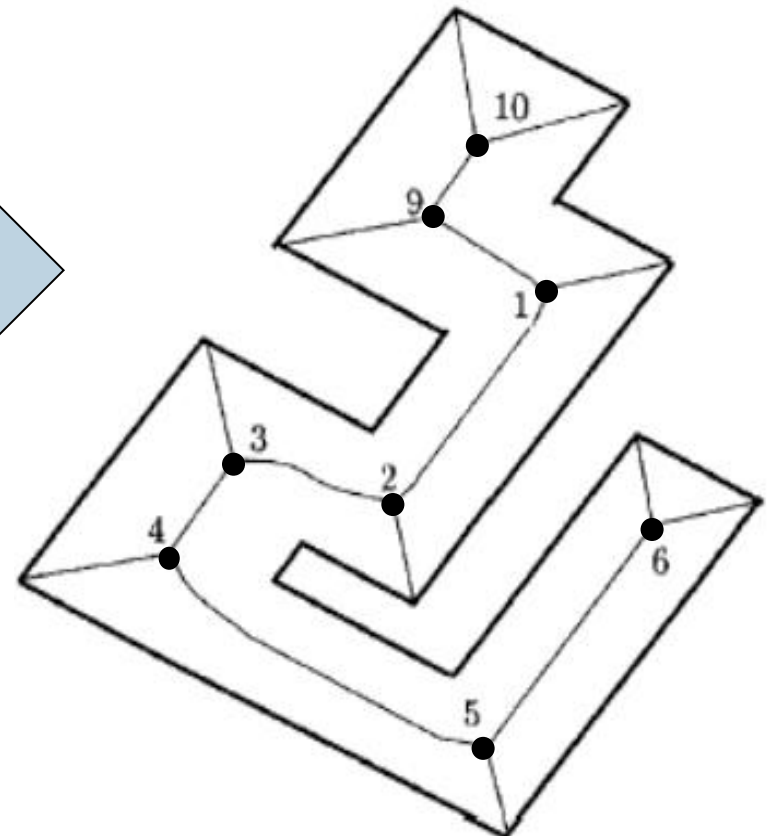
- Construction de **cartes topologiques** (cf. le Ch. 1.3)
 - Démarrage
 - Trouver l'objet le plus proche
 - Se déplacer jusqu'à trouver un second objet
 - Suivre *la ligne médiane* vers un troisième objet
 - Définition du *lieu* initial
 - Tant qu'il existe une arête inexplorée
 - Suivre cette arête vers le *lieu* situé à l'autre bout
 - Arrêt quand toutes les arêtes ont été explorées

Graphe de Voronoï

- Exemple



Construction de la carte
topologique d'un
bâtiment (8 lieux)



Partie 4 : Planification de trajectoire et évitement d'obstacles

5. Planification probabiliste

Méthodes déterministes et probabilistes

Méthodes déterministes (champs de potentiel, fenêtre dynamique, graphe de Voronoï)

- Elles permettent de retrouver le même chemin sans collisions à *chaque exécution*, sous réserve d'avoir des conditions initiales équivalentes
- Les méthodes déterministes sont dites *complètes en résolution* car elles garantissent de trouver une solution ou d'indiquer *s'il n'y a pas de solution*

Méthodes probabilistes

- Ces méthodes ne trouveront pas forcément le même chemin sans collisions à *chaque exécution*, même avec les mêmes conditions initiales
- Ces méthodes ne sont pas complètes en résolution, mais elles garantissent de trouver un chemin sans collisions s'il en existe un. On dit qu'elles sont *complètes en probabilité*

Planification probabiliste

Les *planificateurs probabilistes* font partie de la grande famille des *méthodes basées sur l'échantillonnage* (« sampling-based methods », en anglais)

- Très efficaces, spécialement pour problèmes définis dans un espace des configurations \mathcal{C} de *très haute dimensionalité*

Idée de base des méthodes basées sur l'échantillonnage :

Déterminer un ensemble fini de configurations sans collisions qui représentent adéquatement l'*espace libre* dans l'environnement et utiliser ces configurations pour construire une "*roadmap*" (carte de route) entre deux poses données q_s et q_b du robot

- À chaque iteration, on choisit une *configuration candidate* et on vérifie qu'elle ne comporte pas de collisions entre le robot et les obstacles
- Si il y a une collision, la configuration candidate est rejetée. Sinon, elle est rajoutée à la roadmap et elle est connectée, si possible, aux autres configurations déjà mémorisées

Planification probabiliste

Cette procédure est assez générale. Il y a deux façons de choisir les candidats :

- *Approche déterministe* : les configurations candidates sont choisies à travers une *grille régulière* appliquée à l'environnement (voir, par ex. [Janson *et al.*, IJRR'18])
- *Approche stochastique* : les configurations candidates sont choisies selon une certaine *fonction de densité de probabilité* (pdf)

Deux méthodes importantes qui utilisent l'*approche stochastique* sont :

1. **PRM** (Probabilistic Roadmap)
2. **RRT** (Rapidly-exploring Random Tree)

Remarque : l'étude de l'*optimalité* de ces méthodes est assez récente (elle s'appuie sur la théorie des graphes aléatoires et de la percolation), voir les articles :

"*Sampling-based algorithms for optimal motion planning*", S. Karaman, E. Frazzoli, Int. Journal of Robotics Research, vol. 30, no. 7, pp. 846-894, 2011

"*Exploring implicit spaces for constrained sampling-based planning*", Z. Kingston, M. Moll, L.E. Kavraki, Int. Journal of Robotics Research, vol. 38, no. 10-11, pp. 1151-1178, 2019

Planification probabiliste : PRM

1. Probabilistic Roadmap (PRM)

"*Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces*", L.E. Kavraki, P. Svestka, J.-C. Latombe, M.H. Overmars, IEEE Trans. Robotics and Automation, vol. 12, n. 4, pp. 566-580, 1996

Algorithme :

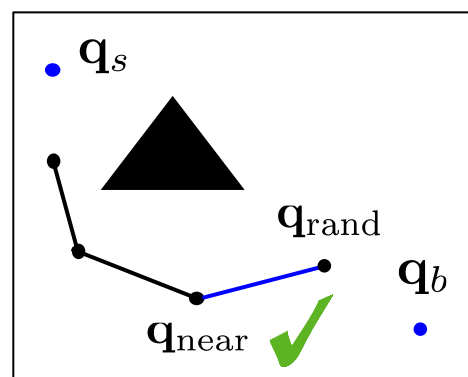
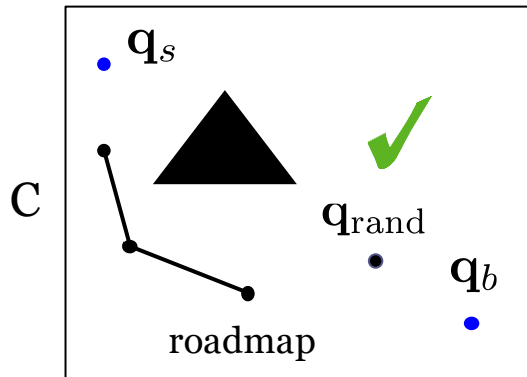
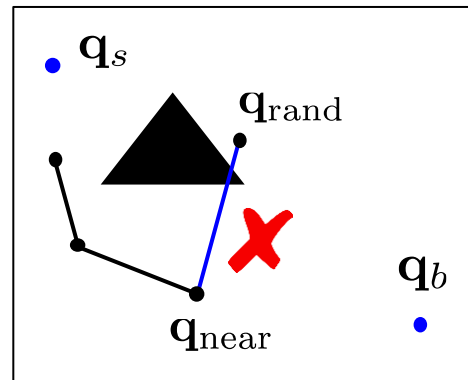
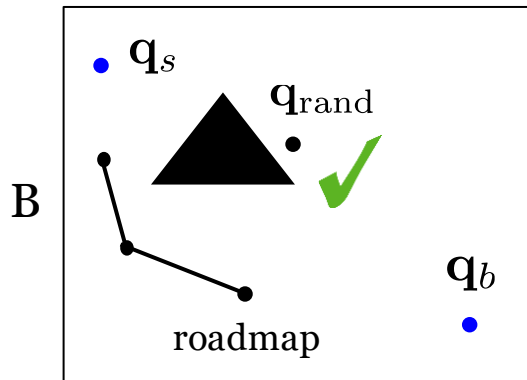
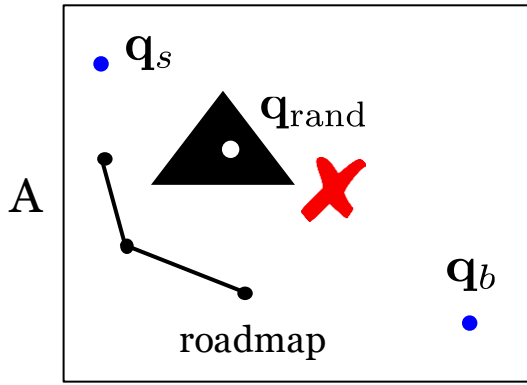
- On génère un échantillon aléatoire de l'espace des configurations q_{rand} en utilisant une *pdf uniforme*
- q_{rand} est testé pour les collisions
- Si q_{rand} ne génère pas de collisions, il est ajouté à la *roadmap* (PRM) et connecté (si possible) à travers des *chemins locaux sans collisions*, à des configurations 'suffisamment' proches déjà présentes dans la roadmap

Planification probabiliste : PRM

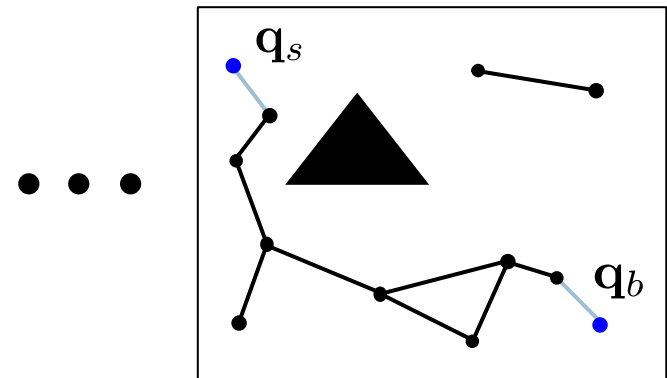
- La génération d'un chemin local sans collisions entre q_{rand} et une configuration proche q_{near} est effectuée par un *planificateur local*. Typiquement, on considère un chemin droit entre q_{rand} et q_{near} , et on vérifie s'il y a des collisions (par ex. on vérifie que les échantillons individuels du segment ne génèrent pas de collisions)
- Si le chemin droit provoque une collision, il est rejeté et q_{rand} et q_{near} ne sont pas connectés dans la roadmap
- La procédure incrémentale de la méthode PRM s'arrête lorsque un *nombre maximal d'itérations* a été atteint ou le *nombre de composantes connexes* dans la roadmap dévient inférieur à un seuil-limite
- On vérifie si il est possible de connecter q_s et q_b à la *même* composante connexe de la PRM en utilisant des chemins locaux sans collisions

Remarque : si une solution n'a pas été trouvée, la PRM peut être améliorée en effectuant *plus d'itérations* ou en utilisant des stratégies pour *réduire le nombre de composantes connexes*

PRM : illustration de l'algorithme (3 cas de figure : A, B et C)

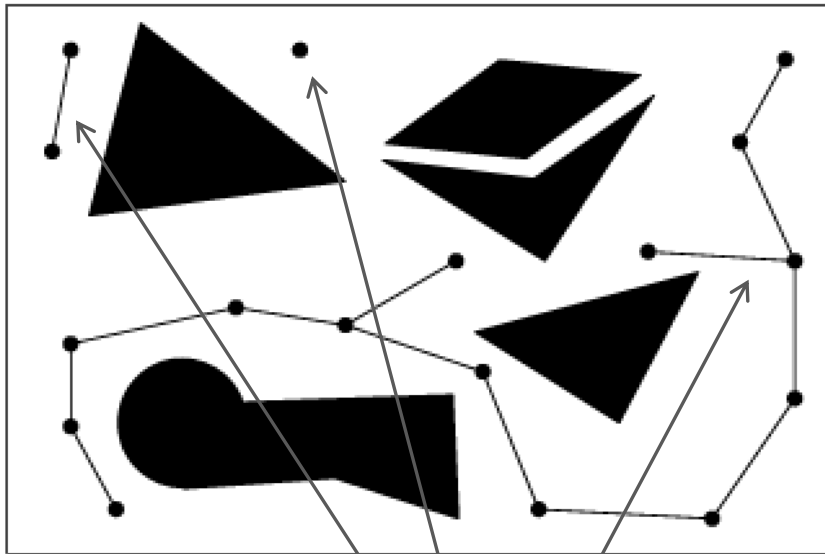


2 composantes
connexes de la PRM

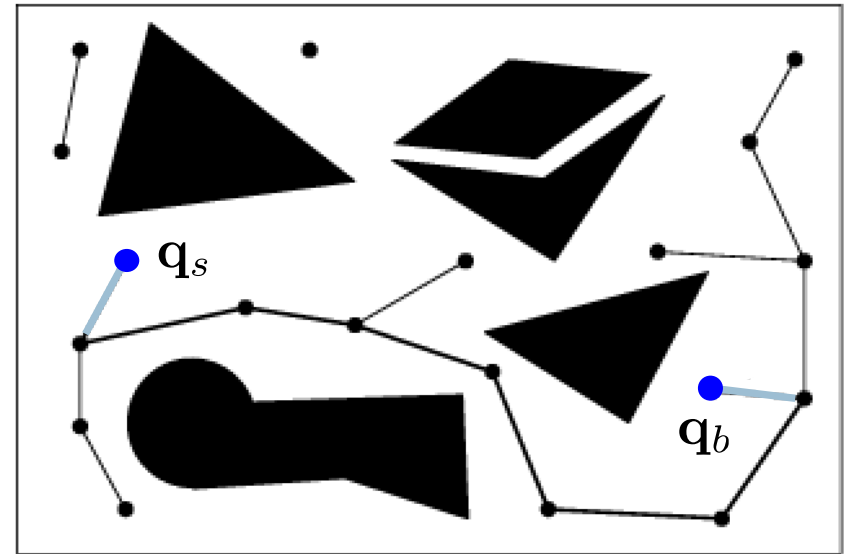


Planification probabiliste : PRM

Exemple



3 composantes
connexes de la PRM



Utilisation de la PRM
pour trouver un chemin
sans collisions entre q_s et q_b

Planification probabiliste : PRM

Avantages de la méthode PRM :

- Elle trouve un chemin sans collisions *très rapidement* (à condition que la PRM ait été bien développée)
- Nouvelles instances du même problème produisent une amélioration potentielle de la PRM. La PRM améliore, en termes de connexité et d'efficacité temporelle, avec l'utilisation (la méthode PRM est donc intrinsèquement « **multiple-query** » ou à *demande multiple*)
- Dans des espaces à *très haute dimensionnalité* (dimension > 4) la méthode PRM est très efficace pour trouver rapidement une solution
- *Simplicité* de mise en œuvre : il n'est pas nécessaire d'avoir une **représentation géométrique** des obstacles

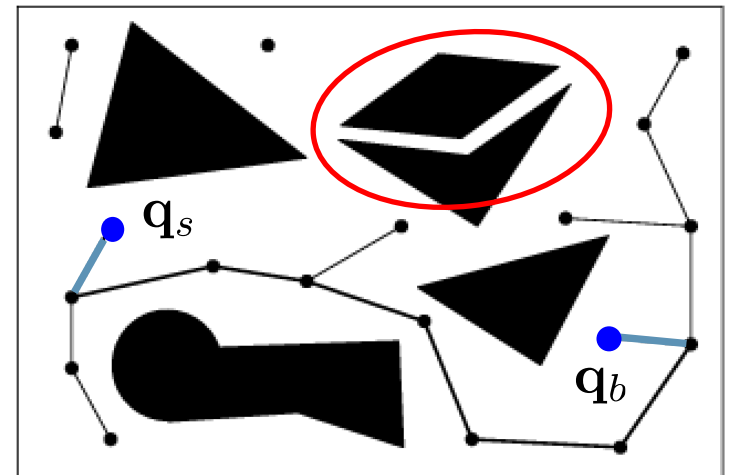
Planification probabiliste : PRM

Inconvénients de la méthode PRM

- PRM est seulement *complet en probabilité* : la probabilité de trouver une solution (s'il y a une) tend vers 1 comme le temps d'exécution tend vers l'infini. Donc, s'il n'y a pas de solutions, l'algorithme ne terminera *jamais* : en pratique, un *nombre maximum d'itérations* est fixé pour garantir la terminaison
- Les *passages étroits* dans l'environnement sont critiques. En utilisant une *pdf uniforme* pour générer q_{rand} , la probabilité de placer un candidat dans une certaine région de l'espace libre est proportionnelle à son *volume*. Par conséquent, il serait peu probable d'avoir un chemin à travers un *passage étroit* dans un délai raisonnable

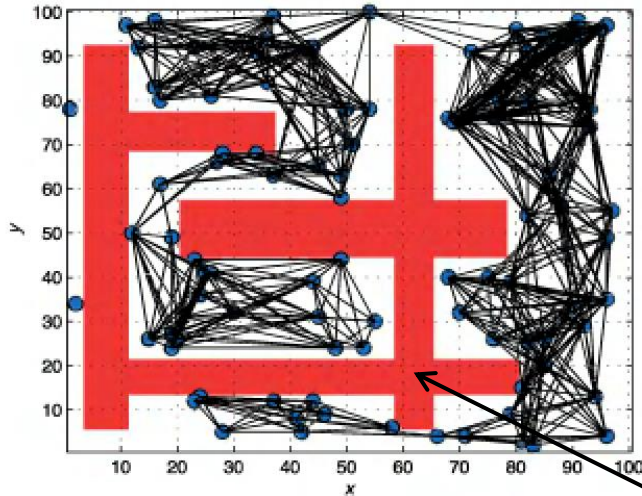
Solution possible : utiliser une pdf *non uniforme*

- Le contrôle de collision est *chronophage*. Avec **Lazy PRM** [Bohlin & Kavraki, ICRA'00], on réduit le nombre de contrôles pendant la planification et par conséquent, on minimise le temps d'exécution

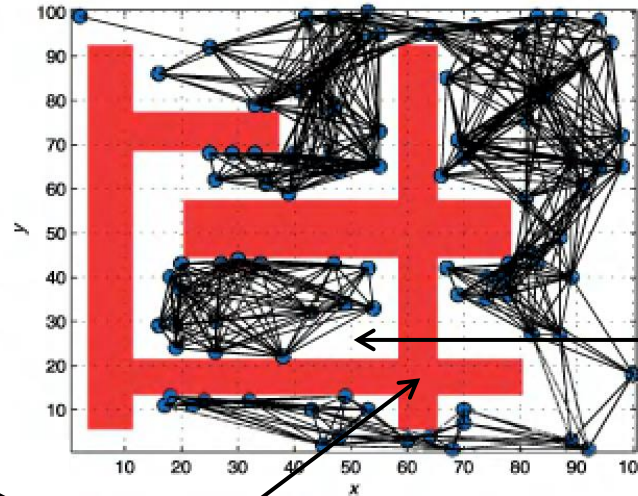


Planification probabiliste : PRM

Exécution 1



Exécution 2



Deux composantes connexe de la PRM

Obstacle

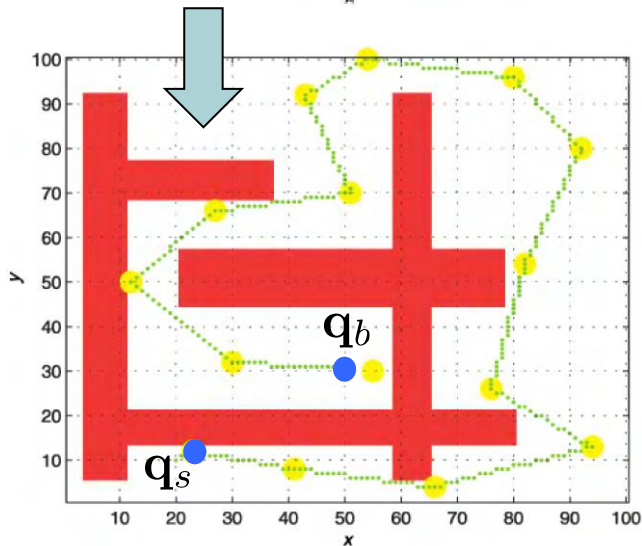
“*Robotics, Vision and Control: Fundamental Algorithms in MATLAB*”, P. Corke, Springer, 2011

Robotics Toolbox de P. Corke :

```
>> prm.plan()
```

Dans la *Robotics System Toolbox* de Matlab (R2017) :

```
>> PathPlanningExample.m
```



Chemin sans collisions
du robot choisi (vert)

Planification probabiliste : RRT

2. Rapidly-exploring Random Tree (RRT)

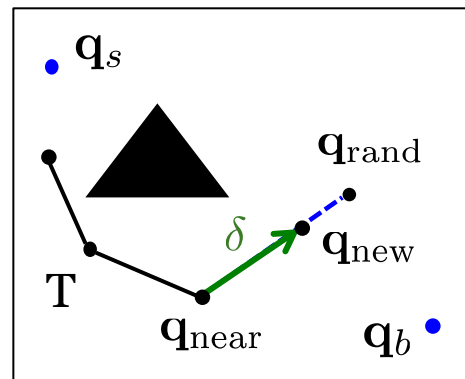
"*Randomized Kinodynamic Planning*", S.M. LaValle, J.J. Kuffner Jr., Int. Journal of Robotics Research, vol. 20, n. 5, pp. 378-400, 2001

- RRT est un algorithme de planification probabiliste « **single-query** »
 - L'algorithme ne génère pas une roadmap qui représente de façon exhaustive la connexité de l'espace libre dans tout l'environnement. On explore uniquement une *portion de l'espace libre* qui est pertinente à la résolution du problème (ce qui engendre une forte réduction du *temps de calcul*)
- La méthode RRT utilise une structure de données qui s'appelle *Rapidly-exploring Random Tree* (RRT)
 - L'expansion incrémentale de l'RRT (on appelle cet *arbre* « T ») est basée sur une simple procédure stochastique répétée à chaque itération

Planification probabiliste : RRT

Algorithme

- On génère un échantillon aléatoire de l'espace des configurations q_{rand} en utilisant une *pdf uniforme* (comme pour la méthode PRM)
- La configuration q_{near} dans T la plus proche à q_{rand} est déterminée, et une nouvelle configuration candidate q_{new} est générée sur le *segment joignant* q_{near} à q_{rand} , à une distance préfixée δ de q_{near}
- On vérifie que soit q_{new} soit le segment de q_{near} à q_{new} n'engendre pas de collisions. Si tel est le cas, T est élargi en incluant q_{new} et le segment le joignant à q_{near} (q_{rand} n'est pas rajouté à T, donc il n'est pas nécessaire de vérifier s'il engendre des collisions : sa seule fonction est d'indiquer la direction d'expansion de l'arbre T)

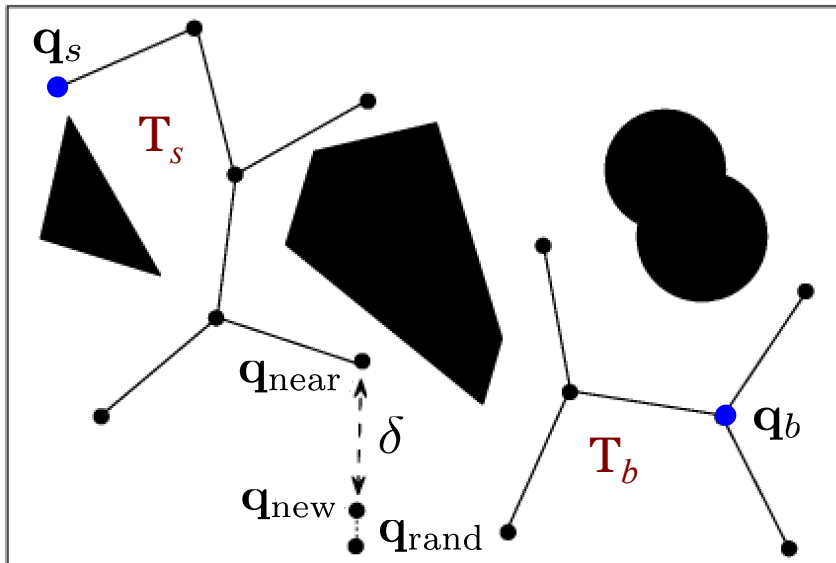


Planification probabiliste : RRT

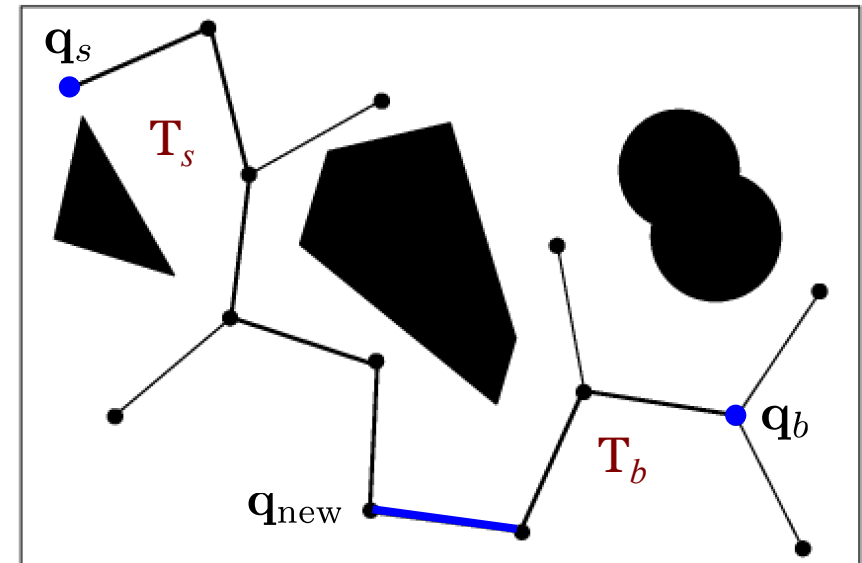
- Pour *accélérer* la recherche d'un chemin entre q_s et q_b , la méthode **RRT bidirectionnelle** utilise **deux arbres** T_s et T_b ancrés en q_s et q_b , respectivement. À chaque itération, les deux arbres sont élargis avec la méthode décrite dans la slide précédente
- Après un certain nombre de pas d'expansion, l'algorithme entre dans une phase où il essaie de connecter T_s et T_b en étendant chaque arbre vers l'autre. Ceci est fait en générant un q_{new} comme une expansion de T_s et en essayant de connecter T_b à q_{new}
- Si le segment joignant T_s et T_b est sans collisions, l'expansion est *complète* et les deux arbres sont raccordés
- Si la procédure de connexion n'aboutisse pas à une solution après un certain nombre d'itérations, on peut conclure que les deux arbres sont encore *distants* et la **phase d'expansion** peut recommencer

Planification probabiliste : RRT

- Illustration de la méthode RRT bidirectionnelle ou « RRT-Connect »



Procédure stochastique pour
l'expansion d'un arbre (T_s)



Les arbres T_s et T_b ont été raccordés
grâce au arc bleu

Planification probabiliste : RRT

Avantages de la méthode RRT

- La procédure d'expansion de RRT est *simple* et *très efficace* pour « explorer » l'espace libre dans un environnement (même non convexe). Elle est biaisée vers les parties de l'environnement qui n'ont pas été encore visitées
- La probabilité que une configuration générique de l'espace libre soit rajoutée à le RRT tend vers 1 comme le temps d'exécution tend vers l'infini (à condition que la configuration se trouve dans la même composante connexe de l'espace libre où le RRT est ancré)
- Comme la méthode PRM, la méthode RRT est **complète en probabilité**

Plusieurs variantes possibles :

- Au lieu d'utiliser une δ constante pour générer q_{new} , on peut définir un pas qui est une *fonction de l'espace libre disponible* (on peut aller jusqu'à q_{rand} , comme dans la phase expansion de la méthode PRM). Cette version **gloutonne** (« greedy ») de la méthode peut être beaucoup plus efficace, si il y a des vastes zones vides
- RRT* garantie la convergence vers un chemin qui est optimal par rapport à une certaine fonction de coût $c : \Sigma_C \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ [Karaman & Frazzoli, IJRR'11]
- On peut facilement utiliser la méthode RRT avec des *contraintes différentielles* (non-holonômes et cinématiques/dynamiques) sur le robot

Planification probabiliste : RRT

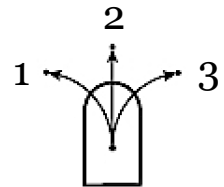
Extension pour robots non-holonômes

Pour un robot de type unicycle, les chemins en ligne droite pour aller de q_s à q_b générés par la méthode RRT, *ne sont pas admissibles*, en général

- **Solution simple et efficace** : utiliser des **primitives de mouvement**
 - Elles sont un ensemble fini et admissible de chemins locaux dans l'espace des configurations
 - Chaque primitive est produite par un *choix spécifique des vitesses* dans le modèle cinématique
 - Les chemins admissibles sont générés par *concaténation* des primitives de mouvement

- **Exemple** : pour un *robot unicycle*, l'ensemble de vitesses suivant

$$v(t) = \bar{v}, \quad \omega(t) \in \{-\bar{\omega}, 0, \bar{\omega}\}, \quad t \in [t_s, t_s + \Delta], \quad \bar{v}, \bar{\omega} > 0$$

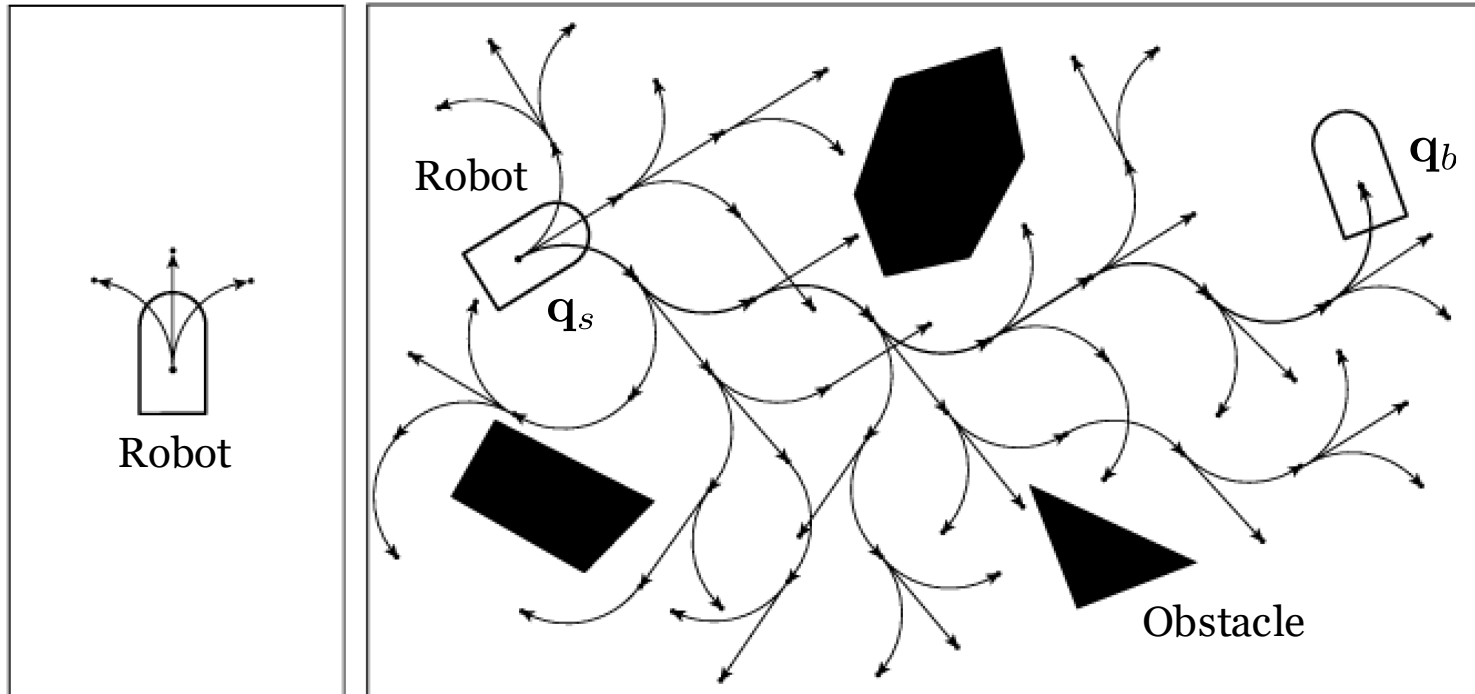


produit trois chemins locaux admissibles : 1) virage à gauche le long d'un arc de cercle, 2) trajet en ligne droite, 3) virage à droite le long d'un arc de cercle

Remarque : ces primitives de mouvement n'autorisent pas la *marche arrière* ou une *rotation sur place* (en effet, $\bar{v} > 0$)

Planification probabiliste : RRT

Extension pour robots non-holonômes



Les 3 primitives
de mouvement
pour un robot
unicycle

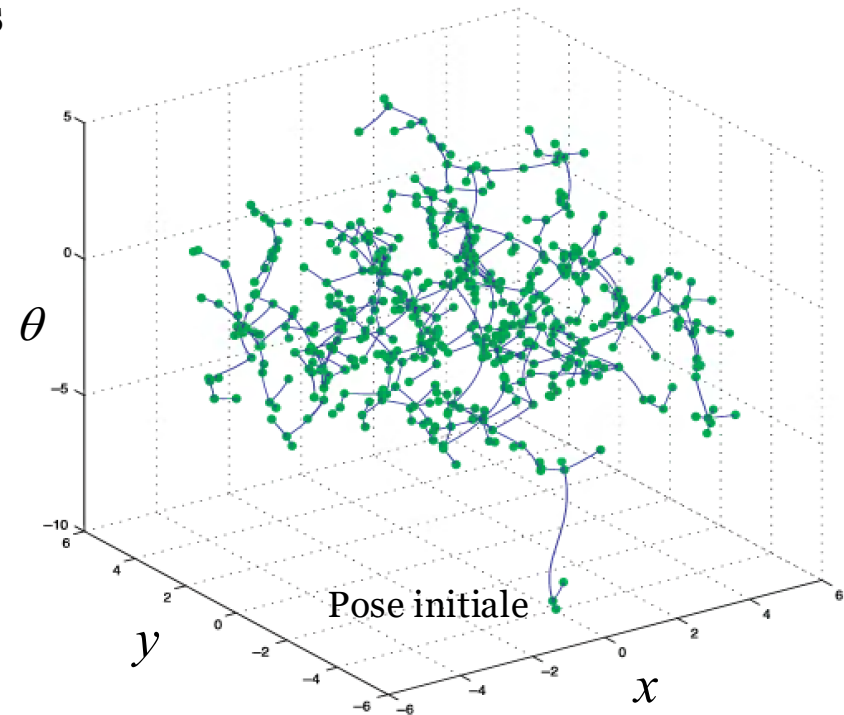
Un exemple de RRT (sa projection
dans l'espace opérationnel du robot)

Planification probabiliste : RRT

Extension pour robots non-holonômes

- L'expansion d'un RRT pour un robot non-holonôme est similaire à la procédure vue précédemment (seulement la génération de q_{new} est différente)
- Sous des hypothèses appropriées, on peut montrer que si la configuration finale peut être atteinte de la configuration initiale à travers une concaténation sans collisions de primitives, la probabilité que q_b soit rajouté à l'arbre T tend vers 1 comme le temps d'exécution tend vers l'infini
- Pour augmenter l'efficacité de la méthode, une *version bidirectionnelle* peut être envisagée

Espace des poses du robot ($\mathcal{C} = \text{SO}(2)$)



RRT pour un robot unicycle avec configuration initiale $[0, 0, 0]^T$. Chaque sommet (vert) représente une *pose admissible* du robot dans l'espace libre

Robotics Toolbox de P. Corke :

```
>> rrt.plan()
```

Planification probabiliste : logiciel et variantes

- Implémentation efficace des méthodes basées sur l'échantillonnage (C++/Python) : [Open Motion Planning Library \(OMPL\)](https://ompl.kavrakilab.org), <https://ompl.kavrakilab.org>
- Nombreuses variantes et améliorations de PRM et RRT dans la littérature :

Planificateurs *multiple-query* :

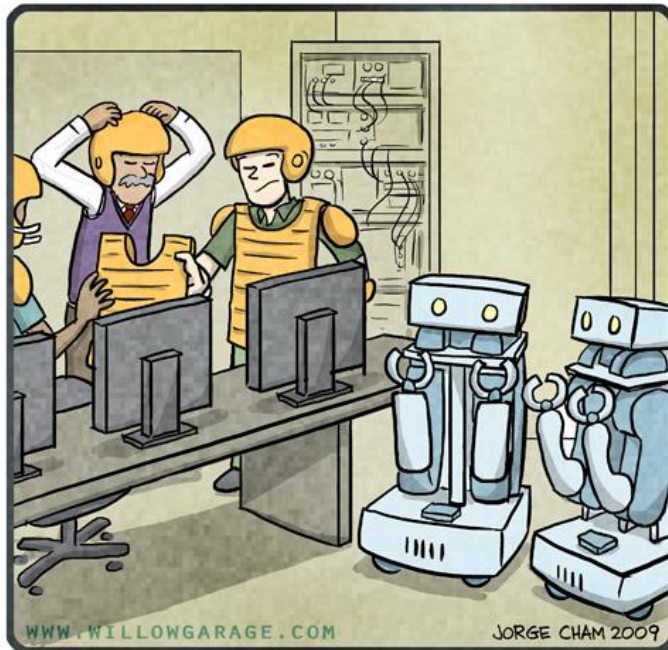
- PRM
 - Lazy PRM
 - PRM* : version asymptot. optimale de PRM
 - Lazy PRM*
- SPARS (*SPArse Roadmap Spanner algorithm*) : planificateur asymptot. quasi-optimal
- SPARS2

Planificateurs *single-query* :

- RRT
 - Lazy RRT, RRT-Rope
 - RRT* : version asymptot. optimale de RRT
 - RRT# et RRTX : deux variantes de RRT* avec une vitesse de convergence plus rapide
 - (Neural) Informed RRT*, neural RRT*
 - SST (*Sparse Stable RRT*) : planificateur ciné-dynamique asymptot. quasi-optimal
 - VF-RRT (*Vector Field RRT*)
 - pRRT (*Parallel RRT*)
 - TSRRT (*Task-Space RRT*)
- EST (*Expansive Space Trees*)
- KPIECE (*Kinematic Planning by Interior-Exterior Cell Exploration*)
- STRIDE (*Search Tree with Resolution Independent Density Estimation*)
- PDST (*Path-Directed Subdivision Trees*)
- FMT* (*Fast Marching Tree*) : plus rapide que RRT*
- BIT* (*Batch Informed Trees*), AIT* (*Adaptively Informed Trees*), EIT* (*Effort Informed Trees*)
- QRRT (*Quotient-Space RRT*)

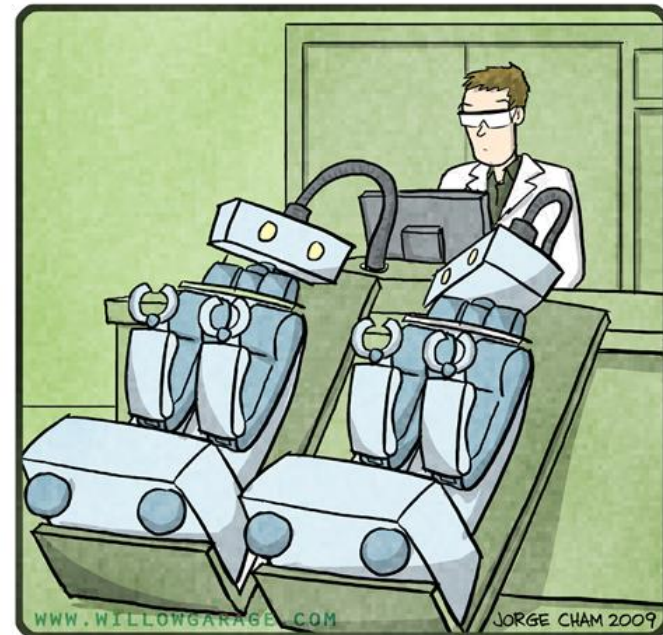
Fin du CM

R.O.B.O.T. Comics



"I HAVE A BAD FEELING
ABOUT THIS DEMO."

R.O.B.O.T. Comics



"DO YOU EVER FEEL LIKE
YOU'RE IN THE MATRIX?"