

# Perception Avancée et Robotique Mobile

UPJV, Département EEA

Master 2 3EA, EC31

Parcours RoVA

**Fabio MORBIDI**

Laboratoire MIS

Équipe Perception Robotique

E-mail: [fabio.morbidi@u-picardie.fr](mailto:fabio.morbidi@u-picardie.fr)



Electronique

Energie Electrique

Automatique

CM, TD: Lundi et Mardi 13h30-16h00, salle CURI 8

TP: Lundi 13h30-16h30, salle TP204

AU 2025-2026



# Ch. 2: Robotique Mobile

- Petit historique

**Partie 1**

- Systèmes, locomotions, applications

**Partie 2**

- Marché mondial et besoins technologiques

**Partie 3**

- Effecteurs et actionneurs

**Partie 4**

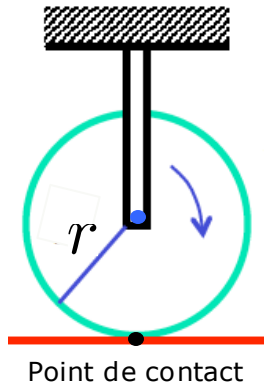
- Robots mobiles à jambes, à **roues** et aériens

**Partie 5**

# Condition de roulement sans glissement (r.s.g.)

## Condition de r.s.g. d'une *roue fixe*

La roue roule sur le sol *sans patiner* (longitudinalement) *ni glisser* (latéralement), à savoir la vitesse relative de la roue par rapport au sol au point de contact est *nulle*



Théoriquement, pour vérifier la condition de r.s.g. il faut réunir les hypothèses suivantes:

1. Le contact entre la roue et le sol est ponctuel
2. La roue est indéformable, de rayon fixe  $r$
3. Le sol est parfaitement plat

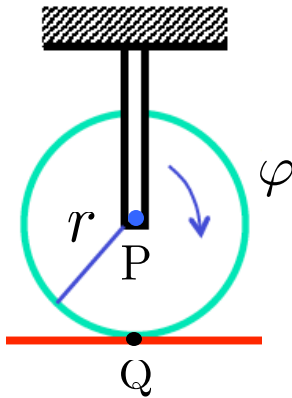
## Remarques :

- En pratique, le contact se fait sur une *surface*
- Hypothèse d'indéformabilité : fausse avec roues équipées de pneus
- Le contact continu avec le sol est essentiel pour l'*odométrie* du robot

# Condition de roulement sans glissement

## Condition de r.s.g. d'une *roue fixe* :

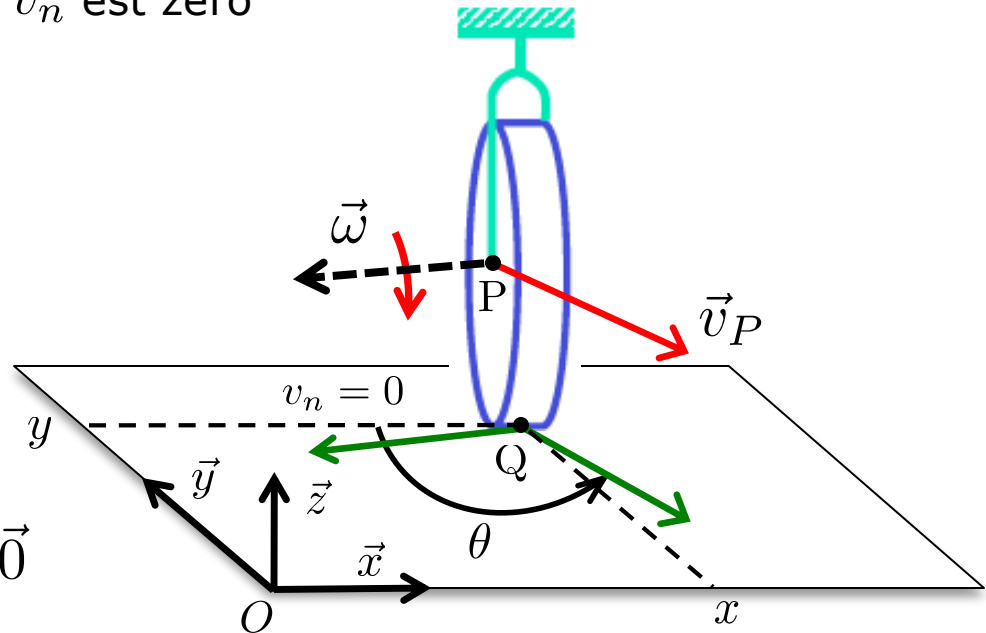
- La composante de la vitesse dans la direction de mouvement de la roue est égale à la vitesse de roulement (à savoir,  $r\dot{\varphi}$ )
- La composante de la vitesse dans la direction perpendiculaire au mouvement de la roue  $v_n$  est zéro



$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$$

$P = (x, y, r)$  : centre de la roue

$Q = (x, y, 0)$  : point de contact de la roue avec le sol



$\vec{\omega}$  : vecteur vitesse de rotation de la roue

$\varphi$  : angle de rotation propre de la roue

$\theta$  : orientation du plan de la roue

# Condition de roulement sans glissement

Si on utilise l'expression des points P et Q dans l'équation précédente, on trouve que :

$$\dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + (\dot{\theta}\vec{z} + \dot{\varphi}(\vec{x}\sin\theta - \vec{y}\cos\theta)) \times (-r\vec{z}) = \vec{0}$$

Si on calcule le produit vectoriel, nous avons que:

$$(\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{x} + (\dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{y} = \vec{0}$$

qui nous donne le système de contraintes scalaires suivant :

$$\dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

$$\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta = 0$$

On peut transformer ces contraintes pour faire apparaître les composantes de vitesse *perpendiculairement à la roue* d'une part et *dans le plan de la roue* d'autre part, à savoir (multiplication à gauche de chaque côté par  $\mathbf{R}(\theta)$ ) :

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} + r\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Contraintes non holonômes

όλος : *holos* "entière"  
νόμος : *nomos* "loi"

$$(1) \quad -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad \text{Contrainte de non-glissement}$$

$$(2) \quad \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = -r\dot{\varphi} \quad \text{Contrainte de roulement pur}$$

(1) et (2) traduisent le fait que  $\vec{v}_P$  soit dans le plan de la roue et que il ait pour module  $r\dot{\varphi}$  : ils s'appellent **contraintes non holonômes**

---

En général, si on a un système de configuration  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  soumis à  $k$  contraintes indépendantes sur les vitesses, on peut les regrouper sous la forme (*pfaffienne*) :

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ .

S'il n'est pas possible d'intégrer l'une de ces contraintes, la contrainte est dite *non intégrable* ou **non holonôme**



Johann F. Pfaff  
(1765-1825)

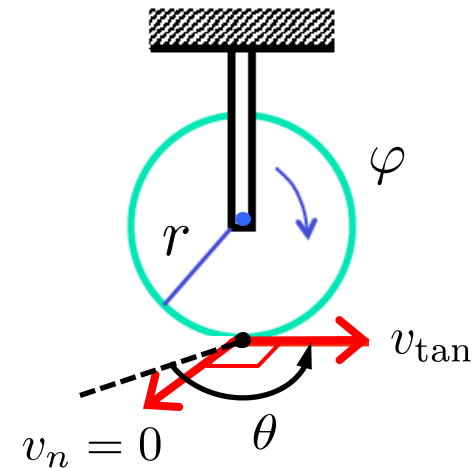
La condition de r.s.g. est *une source* de contraintes pfaffiennes, mais il n'y a d'autres (par ex. en physique et en mécanique)

# Contraintes non holonômes

Exemple : Pour la roue fixe, le vecteur de configuration est  $\mathbf{q} = [x, y, \theta, \varphi]^T \in \mathbb{R}^4$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$$

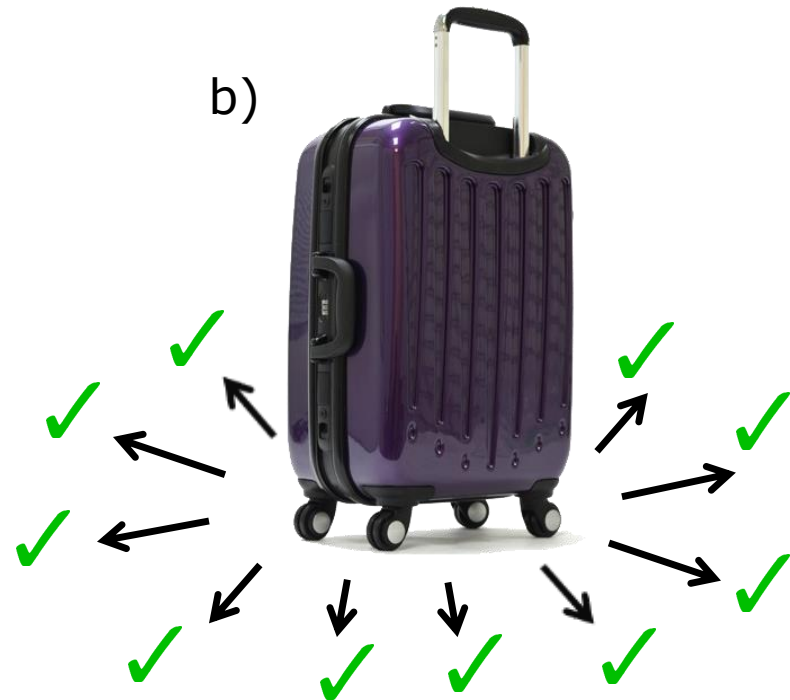


## Remarques :

- En pratique, l'existence de contraintes non holonômes implique que le système **ne peut pas effectuer instantanément** certains mouvements
  - Par exemple, pour la *roue fixe*, pas de *translation instantanée* parallèlement à l'axe de la roue : pour un tel déplacement il faut réaliser au moins deux manœuvres
- Il n'est pas possible de dire *a priori* si une contrainte est intégrable ou non. Pour cela on recourt au **Théorème de Frobenius** : en pratique, seul l'étude des "crochets de Lie"  $[\cdot, \cdot]$  des colonnes de la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  orthogonale à  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  (c'est-à-dire, tel que  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) = 0$ ) sur tout l'espace des configurations, permet de déterminer le *nombre de contraintes intégrables*

# Contraintes non holonômes : intuition physique

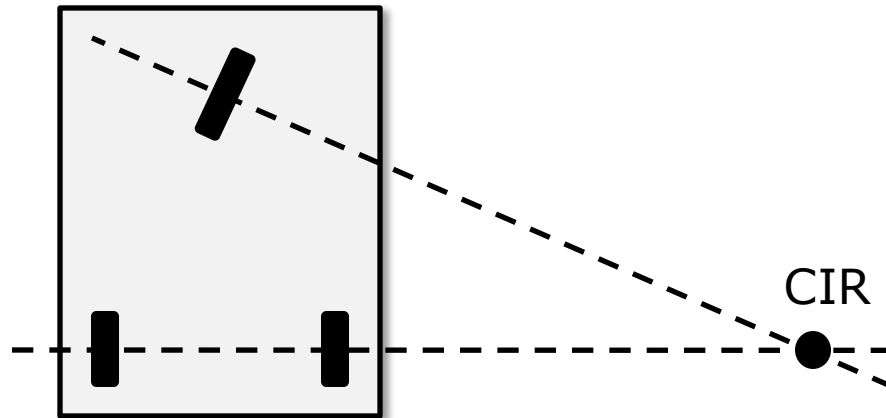
- a) **Sac de voyage avec 2 roues fixes sur le même axe :**  
Impossible de réaliser des déplacements latéraux instantanés
- b) **Sac de voyage avec 4 roues pivot :**  
Les mouvements latéraux instantanés sont réalisables  
(pourvu que les roues pivot puissent se réorienter toutes en même temps)





# Centre instantané de rotation

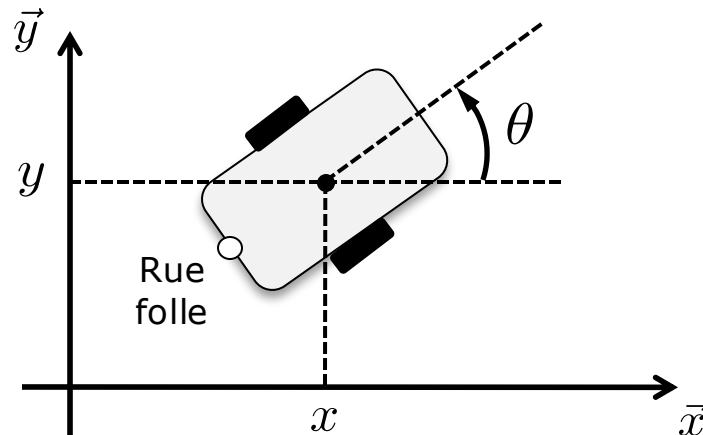
- Le *Centre Instantané de Rotation* (CIR) d'un robot mobile est le point où les prolongements des axes de rotation des roues se coupent
- Le CIR est un point de *vitesse nulle* autour duquel tourne le robot de façon instantanée
- Pour toute disposition de roues, il est nécessaire que le CIR soit **unique** : pour cette raison, il existe en pratique **3 catégories principales** de robots à roues



# 3 catégories principales de robots à roues

## I) Robot mobile de type **unicycle**

- 2 roues fixes motorisées indépendantes
- 1 ou plusieurs roues folles pour assurer la stabilité



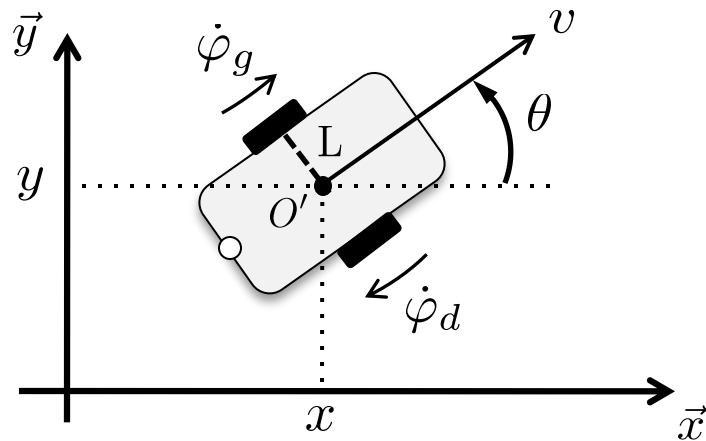
Vecteur de configuration :

$$\mathbf{q} = [x, y, \theta]^T$$

- Simplicité de construction
- Propriétés cinématiques intéressantes
- Très utilisé : ex. robots AmigoBot, Khepera II, Create 3, e-Puck

### 3 catégories principales de robots à roues

- *Modèle cinématique en posture* du robot de type **unicycle**



$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

$(v, \omega)$  : commande du robot  
(vitesse longitudinale et angulaire  
du robot, respectivement)

- Dans un robot à *conduite différentielle*:

$$v = \frac{r(\dot{\varphi}_g - \dot{\varphi}_d)}{2}, \quad \omega = -\frac{r(\dot{\varphi}_g + \dot{\varphi}_d)}{2L}$$

$\dot{\varphi}_d$  : vitesse angulaire de la roue droite,  $2L$  : largeur de l'essieu

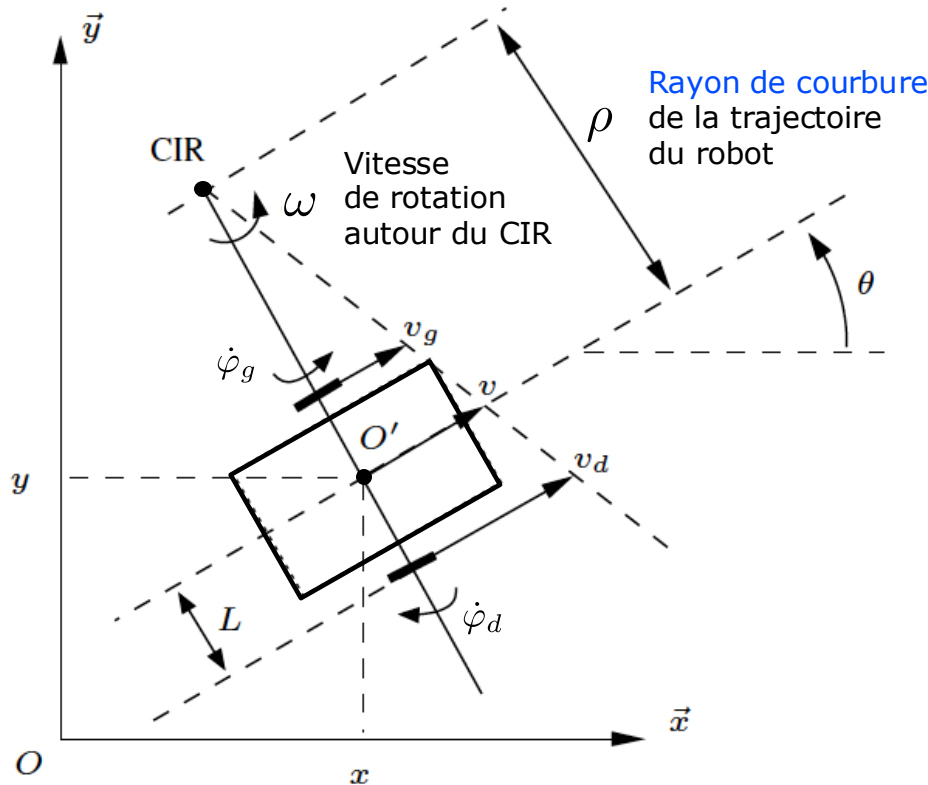
$\dot{\varphi}_g$  : vitesse angulaire de la roue gauche,  $r$  : rayon des roues

# 3 catégories principales de robots à roues

Si  $\dot{\varphi}_d = -\dot{\varphi}_g$  le robot se déplace en avant en ligne droite

Si  $\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_g$  le robot tourne sur lui-même en sens horaire

## Robot à conduite différentielle et CIR



Vitesse longitudinale de la roue droite et gauche :

$$v_d = -r \dot{\varphi}_d = (\rho + L) \omega$$

$$v_g = r \dot{\varphi}_g = (\rho - L) \omega$$

ce qui permet de déterminer :

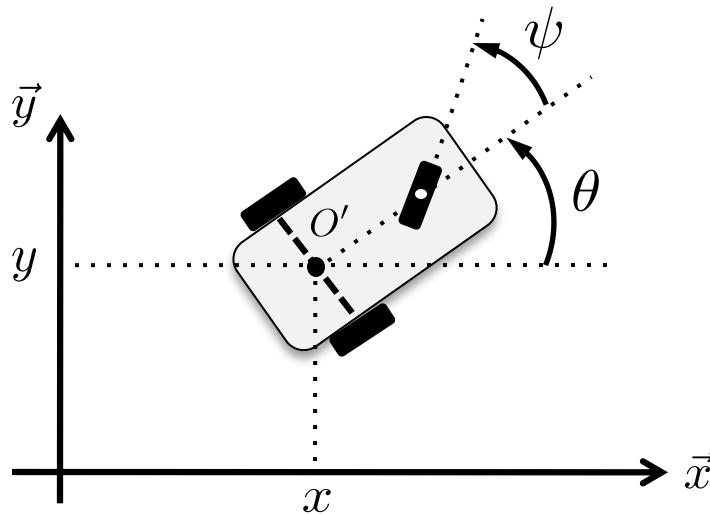
$$\rho = L \left( \frac{\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_g}{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g} \right)$$

Cette équation nous permet de situer le CIR sur l'axe des roues

# 3 catégories principales de robots à roues

## II) Robot mobile de type **tricycle**

- 2 roues fixes sur le même axe
- 1 roue centrée orientable



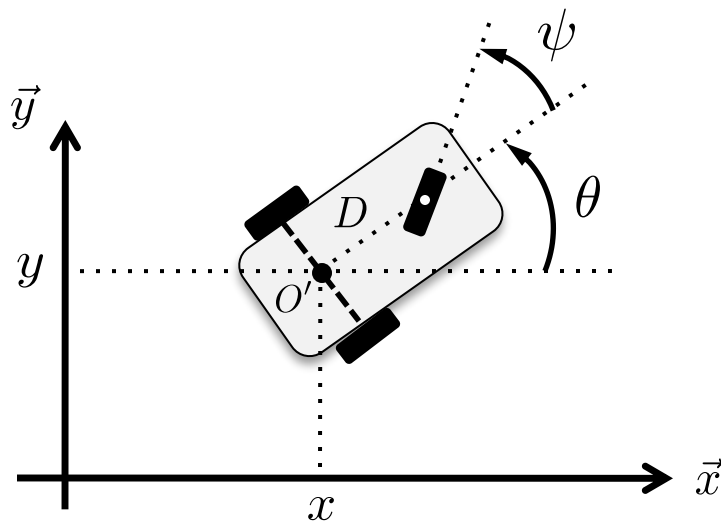
Vecteur de configuration :

$$\mathbf{q} = [x, y, \theta, \psi]^T$$

- Angle de braquage (du train avant) limité
- Propriétés cinématiques similaires au robot unicycle

# 3 catégories principales de robots à roues

- *Modèle cinématique en posture* du robot de type **tricycle** motorisé à l'avant



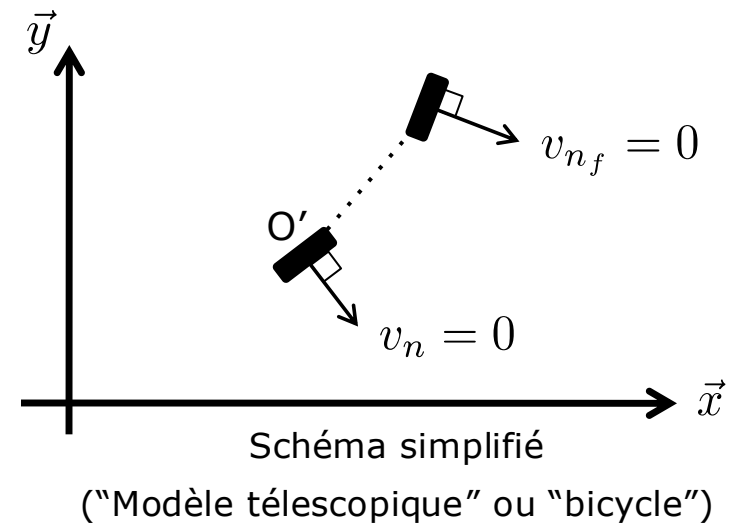
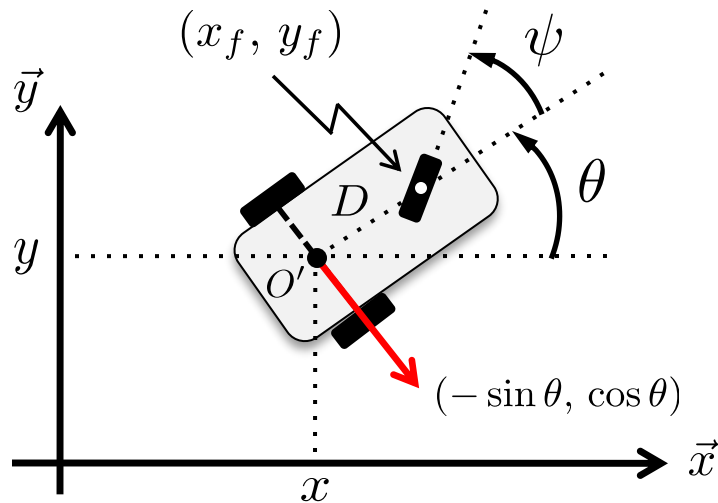
$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \cos \psi \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\theta} = \frac{u_1 \sin \psi}{D} \\ \dot{\psi} = u_2 \end{cases}$$

$(u_1, u_2)$  : commande du robot  
(vitesse longitudinale et  
vitesse angulaire imposées  
à la roue orientable)

$D$  : distance entre le centre  
de la roue orientable et le  
centre de l'axe à l'arrière

# 3 catégories principales de robots à roues

- On peut dériver le modèle cinématique en posture du robot de type **tricycle** motorisé à l'avant, à partir des **contraintes de r.s.g.**

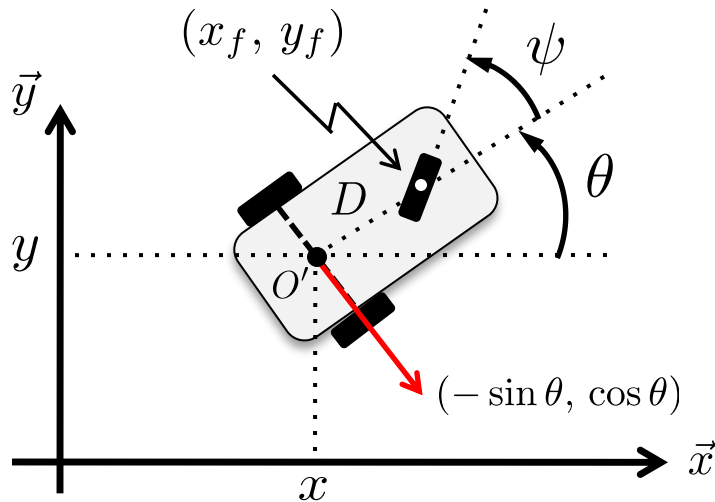


Deux contraintes (de **non-glissement**):

$$\left\langle \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = \dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta = 0 \quad \text{"Roue" arrière}$$

$$\dot{y}_f \cos(\theta + \psi) - \dot{x}_f \sin(\theta + \psi) = 0 \quad \text{Roue avant}$$

# 3 catégories principales de robots à roues



Si on utilise les relations géométriques

$$\begin{cases} x_f = x + D \cos \theta \\ y_f = y + D \sin \theta \end{cases}$$

dans l'équation précédente, nous trouvons que:

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin(\theta + \psi) & \cos(\theta + \psi) & D \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{forme pfaffienne})$$

On peut remarquer que les directions de mouvement instantanées *réalisables* sont les directions :

$$\dot{\mathbf{q}} \in \ker(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$$

où  $\ker(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$  indique le *noyau* de la matrice  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ .

**Rappel:** Étant donnée une matrice  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\ker(\mathbf{M}) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$



# 3 catégories principales de robots à roues

Si les colonnes de la matrice  $\mathbf{B}$  forment une *base pour le noyau* de la matrice  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$ , on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{u}$$

où  $\mathbf{u}$  est le *vecteur des vitesses* (commande), car l'image de  $\mathbf{B}$ ,  $\text{Im}(\mathbf{B}(\mathbf{q})) = \ker(\mathbf{A}^T(\mathbf{q}))$ ,  $\forall \mathbf{q}$  dans l'espace des configurations du robot

On peut choisir par exemple (il n'y a pas une solution *unique*) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \text{ En effet } \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

On trouve ainsi le modèle cinématique pour le robot de type tricycle motorisé à l'avant, vu auparavant :

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

# 3 catégories principales de robots à roues

## Exercice :

1. Répéter les calculs précédents en considérant un robot tricycle **motorisé à l'arrière**.  
Maintenant, la commande  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$  est :

$u_1$  : vitesse longitudinale de la "roue" arrière (point central de l'essieu à l'arrière)

$u_2$  : vitesse angulaire imposée à la roue orientable

2. Le modèle cinématique  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$  trouvé est-il valable partout dans l'espace des configurations du robot ?
3. Créer un script Matlab/Simulink qui fait déplacer le robot de la configuration initiale  $\mathbf{q}_0 = [0, 0, \pi/4, 0]^T$  en appliquant les commandes suivantes pendant 30 secondes (utiliser une distance  $D = 0.3$  m dans tous les trois cas) :

a)  $u_1 = 1$  m/s,  $u_2 = \pi/6$  rad/s

b)  $u_1 = 1$  m/s,  $u_2 = 0$  rad/s

c)  $u_1 = 0$  m/s,  $u_2 = \pi/6$  rad/s

### Solution du point 1 :

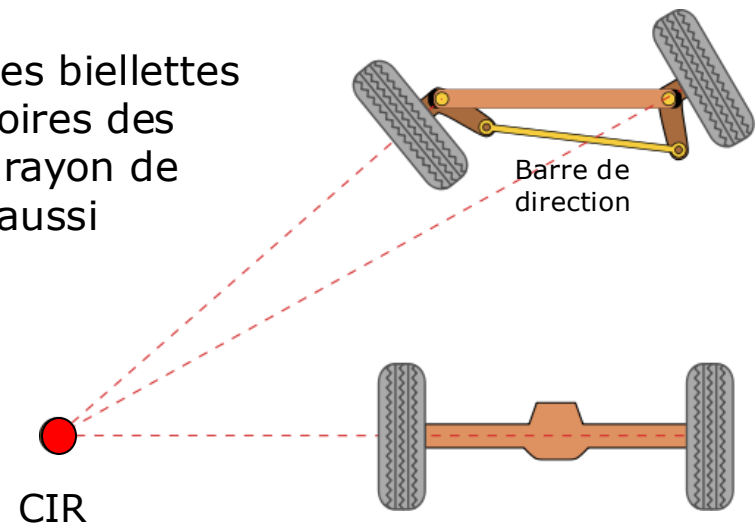
$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{\tan \psi}{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

# 3 catégories principales de robots à roues

Le robot de type **tricycle** n'est que rarement utilisé comme tel, car il n'est pas très stable

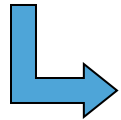
Plus répandu: robot mobile de type **voiture** avec épure d'**Ackermann**

- Deux roues avant
- Pour l'existence d'un CIR **unique** (sur le prolongement de l'essieu arrière), les roues du train avant ne doivent pas avoir la même orientation
- Une *barre de direction* relie rigidement les biellettes de direction. Par conséquent, les trajectoires des roues du train avant n'ont pas le même rayon de courbure et les vitesses des roues sont aussi différentes (« braquage différentiel »)
- Faible manœuvrabilité (roues couplées)

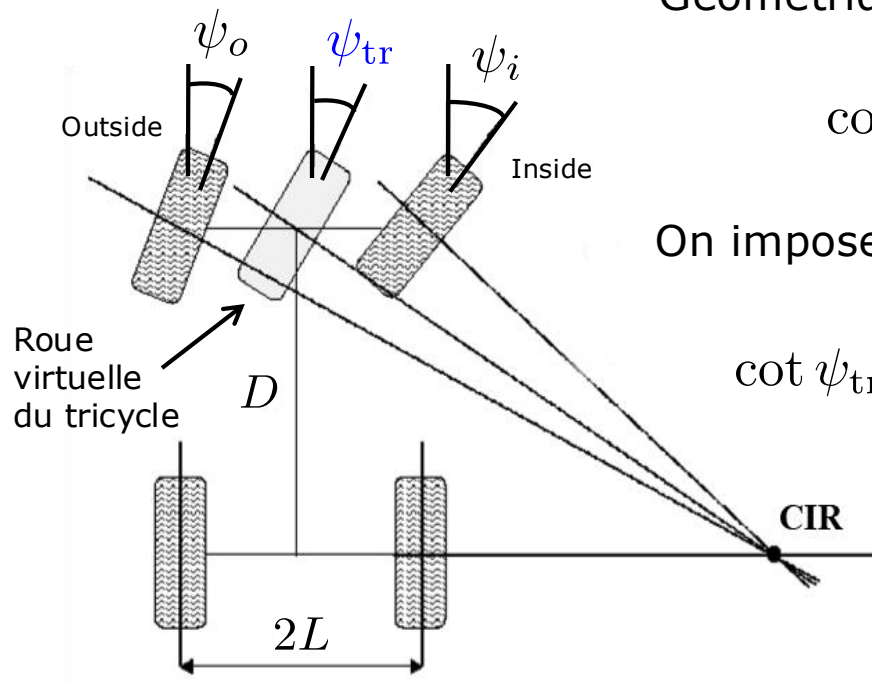


# 3 catégories principales de robots à roues

Il y a une **équivalence** entre le *modèle de type voiture* et le *tricycle*



Il faut figurer une *roue virtuelle* en plaçant la roue orientable du tricycle au centre de l'axe des roues avant de la voiture, orientée de sorte que le CIR reste **inchangé**



Géométriquement nous avons que :

$$\cot \psi_o - \cot \psi_i = \frac{2L}{D}$$

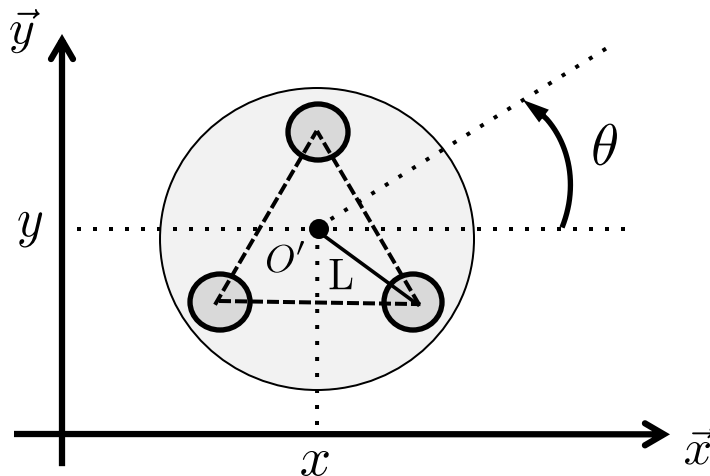
On impose donc la contrainte :

$$\cot \psi_{tr} = \cot \psi_i + \frac{L}{D} = \cot \psi_o - \frac{L}{D}$$

# 3 catégories principales de robots à roues

## III) Robot **omnidirectionnel** :

- On peut agir *indépendamment* sur les vitesses (de translation selon les axes  $x$ ,  $y$  et de rotation autour de l'axe  $z$ ) du robot
- Mouvement possible à *tout moment en toute direction* dans le plan du sol quelque soit l'orientation du robot autour de son axe vertical principal
- Par ex. 3 roues motrices décentrées orientables ou 3 roues sphériques motorisée disposées aux sommets d'un triangle équilatéral (voir la figure en bas)
- D'un point de vue cinématique, il n'est pas possible de réaliser un robot omnidirectionnel avec des *roues fixes* ou des *roues centrées orientables*



Modèle cinématique en posture :

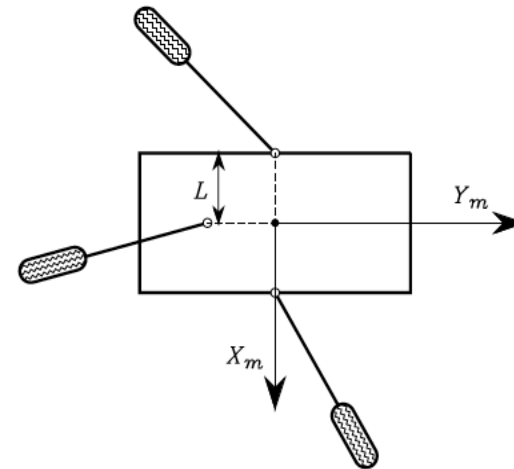
$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \\ \dot{y} = u_2 \\ \dot{\theta} = u_3 \end{cases}$$

$(u_1, u_2, u_3)$  : commande du robot

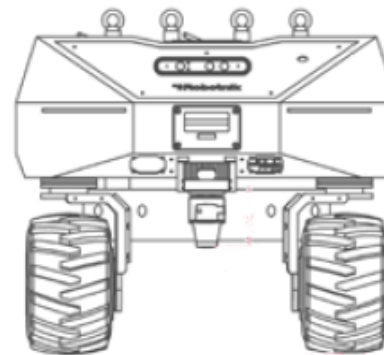
# Robots omnidirectionnels – cas d'étude

- 3 ou 4 roues motrices décentrées orientables
  - Excellente manœuvrabilité

3 roues



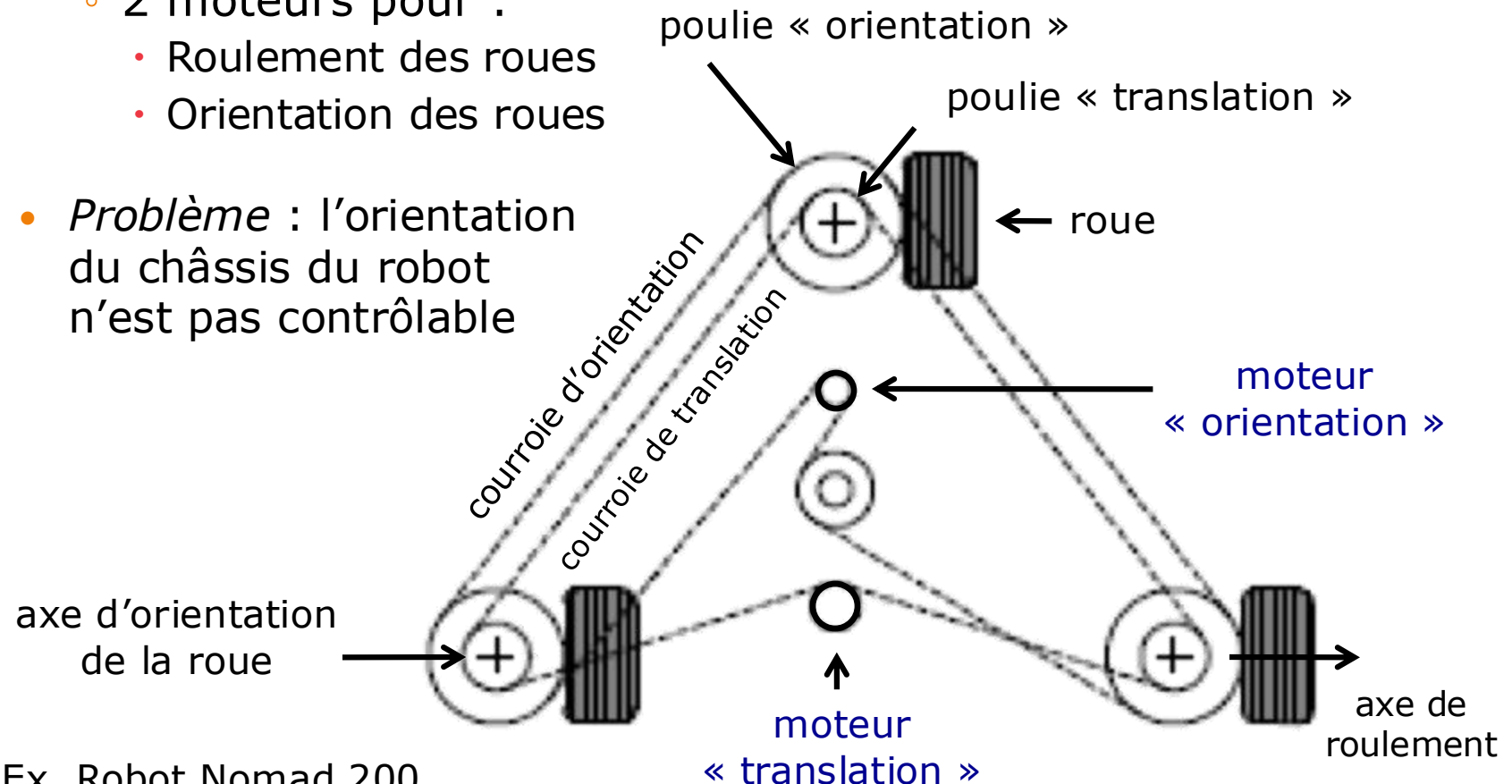
4 roues



« RB-VOGUI »  
de Robotnik

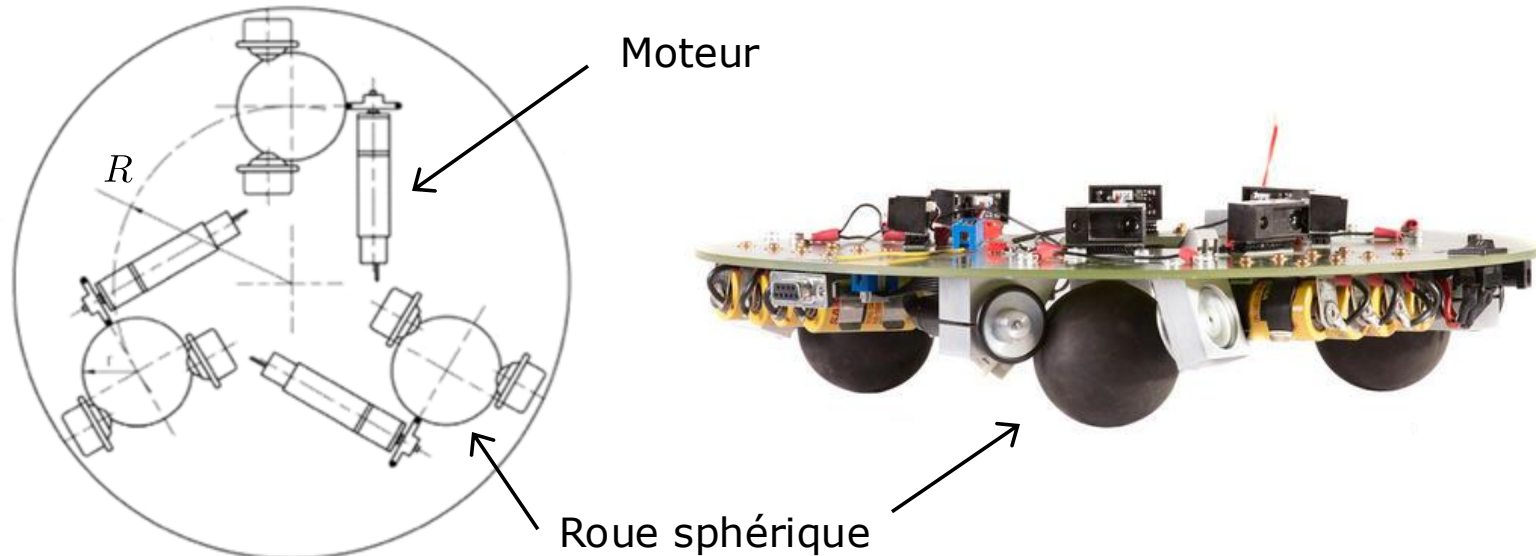
# Robots omnidirectionnels – cas d'étude

- *Synchro drive* : actionnement synchronisé des roues
  - 3 roues décentrées orientables
  - 2 moteurs pour :
    - Roulement des roues
    - Orientation des roues
- *Problème* : l'orientation du châssis du robot n'est pas contrôlable



# Robots omnidirectionnels – cas d'étude

- 3 roues sphériques motorisées : ex. robot « Tribolo » (EPFL)
  - Les roues sphériques sont suspendues par *trois points* de contact : deux par des maintiens sphériques et un par une roue connectée à un moteur
  - Manœuvrabilité excellente, conception simple
  - Limité aux surfaces plates et lisses, et à une faible charge
  - Réalisation de roues sphériques de qualité : coût non négligeable





# Robots omnidirectionnels – cas d'étude

- 4 roues suédoises 45° motorisées



« Uranus » (Carnegie Mellon University)



« SUMMIT XL Steel »  
de *Robotnik*



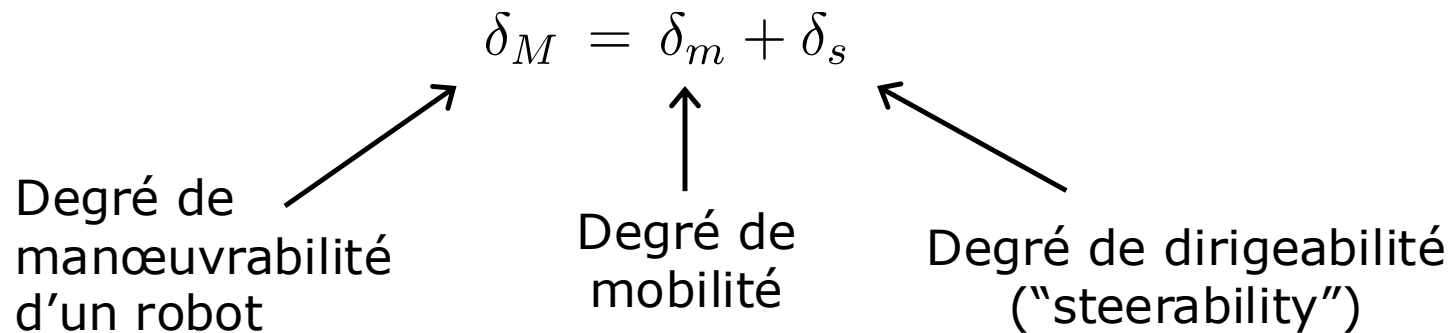
« YouBot »  
de *KUKA*



« TIAGo Pro »  
de *PAL Robotics*

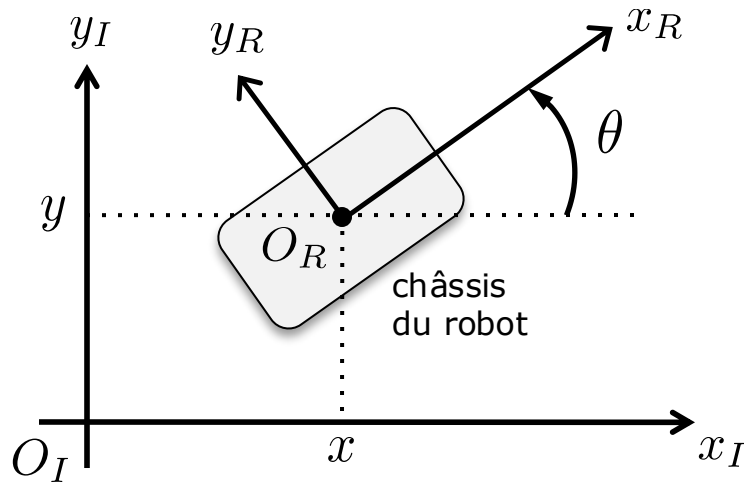
# Manœuvrabilité d'un robot

Plus la *manœuvrabilité* d'un robot mobile est élevée, plus il peut réaliser de mouvements différents en **un minimum d'étapes**



- *Degré de mobilité*  $\delta_m$ : nombre de DDL du châssis du robot qui peuvent être *directement* manipulés à travers des changements de vitesse des roues (ça dépend de la conception du robot)
- *Degré de dirigeabilité*  $\delta_s$ : nombre de DDL qui sont manipulés *indirectement* par le robot *grâce au braquage des roues*

# Manœuvrabilité d'un robot : préliminaires



$\{O_I, x_I, y_I\}$  : repère global (ou inertiel)

$\{O_R, x_R, y_R\}$  : repère local du robot

$\mathbf{q}_I = [x, y, \theta]^T$  : position et orientation du robot dans le repère global

Pour relier le mouvement dans le repère global au mouvement dans le repère local du robot, on a besoin de la matrice de rotation :

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{rotation élémentaire autour de l'axe } z)$$

On a donc :

Deux premiers éléments de  $\dot{\mathbf{q}}_R$  :  
composants du mouvement du  
robot le long des axes  $x_R, y_R$

$$\dot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I$$

Vitesse du robot  
dans le repère global

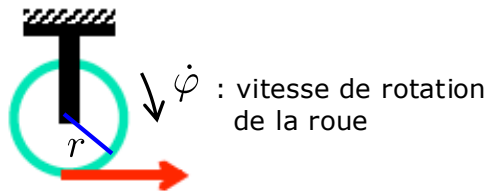
# Roue fixe ou centrée orientable

Contrainte de non-glissement :

$$[\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), \ell \sin \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = 0$$

Contrainte de roulement pur :

$$[\sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta), -\ell \cos \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r\dot{\varphi} = 0$$



## Remarque 1

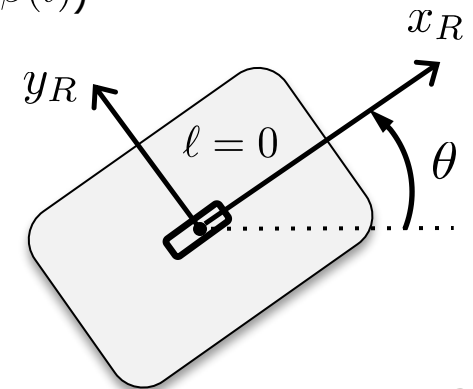
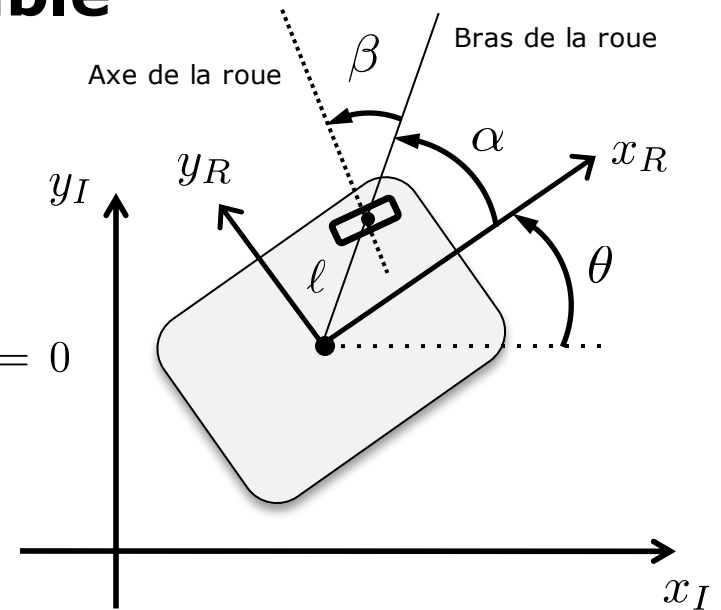
- Pour la *roue fixe*, l'angle  $\beta$  entre le bras et l'axe de la roue, est constant
- Pour la *roue centrée orientable*,  $\beta$  change au fil du temps ( $\beta = \beta(t)$ )

## Remarque 2

Pour  $\alpha = \pi/2$ ,  $\ell = 0$ ,  $\beta = 0$  on retrouve (au signe près) les contraintes de r.s.g. de la roue fixe vues auparavant, à savoir :

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0$$

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = -r\dot{\varphi}$$



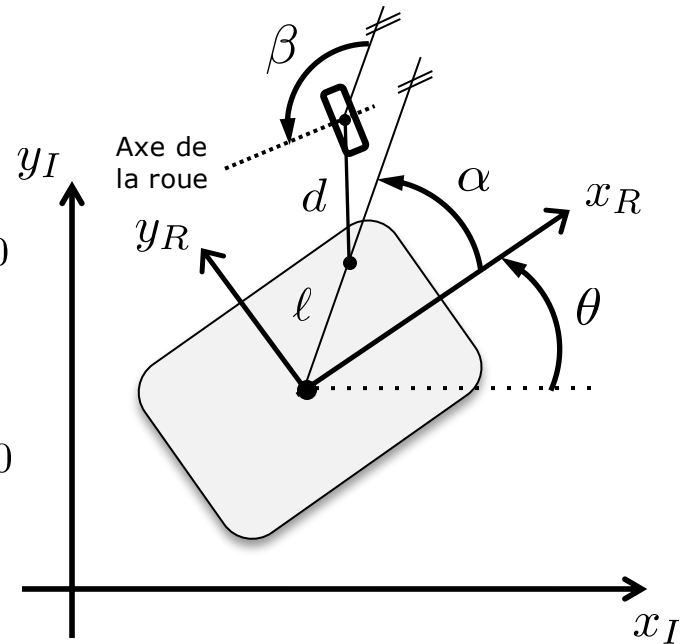
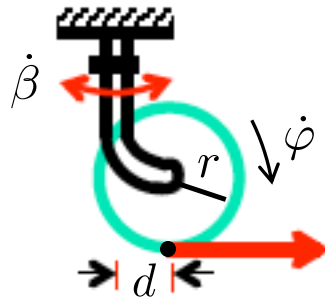
# Roue décentrée orientable

Contrainte de non-glissement :

$$[\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), d + \ell \sin \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I + d\dot{\beta} = 0$$

Contrainte de roulement pur :

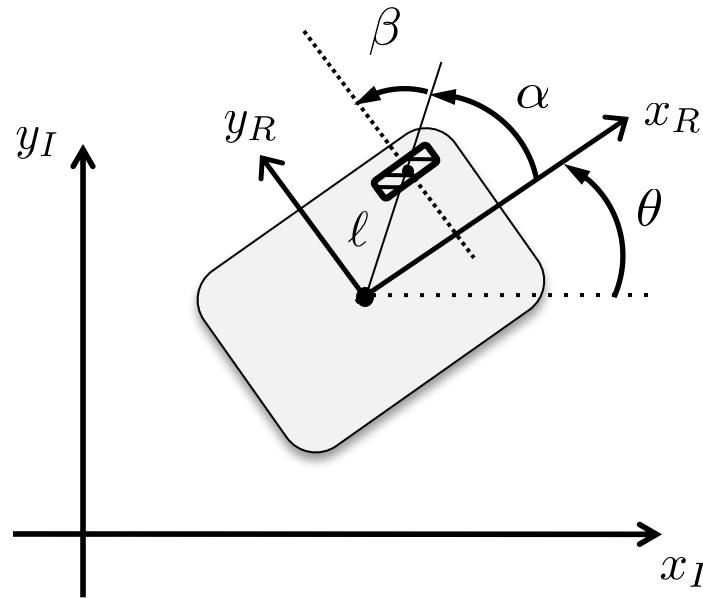
$$[\sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta), -\ell \cos \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r\dot{\varphi} = 0$$



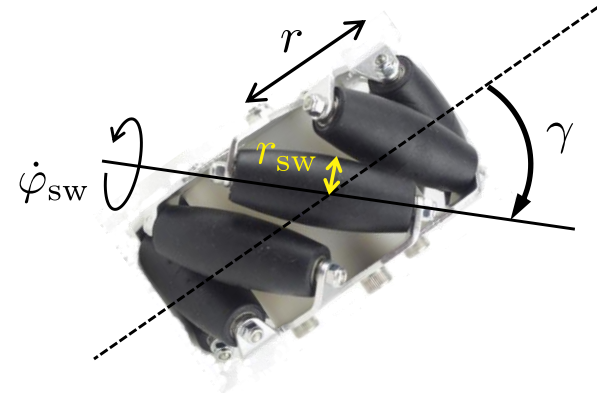
## Remarque :

La contrainte de roulement pur est la même que celle de la roue fixe ou centrée orientable

# Roue suédoise



Zoom sur une roue suédoise 45°



$\gamma$  : angle de rotation entre le plan principal de la roue et l'axe de rotation des roulettes ( $\gamma = \pi/4$  pour une roue suédoise 45°)

$\dot{\varphi}_{sw}$  : vitesse de rotation des roulettes

$r_{sw}$  : rayon des roulettes

$r$  : rayon de la roue

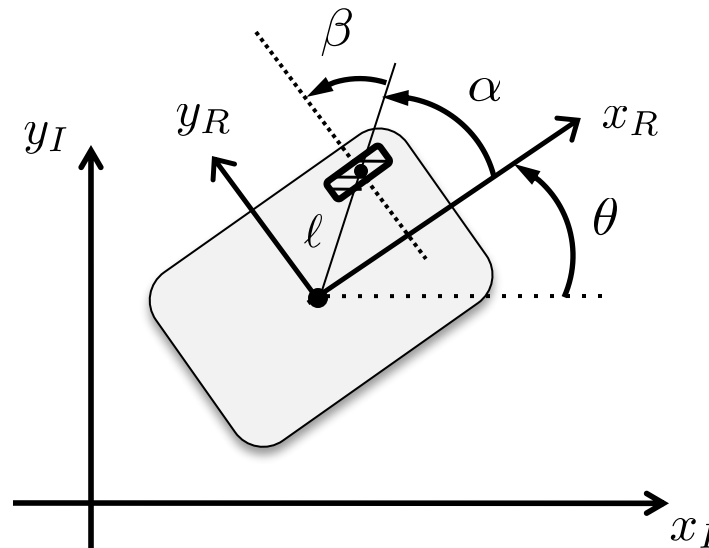
Contrainte de non-glissement :

$$[\cos(\alpha + \beta + \gamma), \sin(\alpha + \beta + \gamma), \ell \sin(\beta + \gamma)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r\dot{\varphi} \sin \gamma - r_{sw}\dot{\varphi}_{sw} = 0$$

Contrainte de roulement pur :

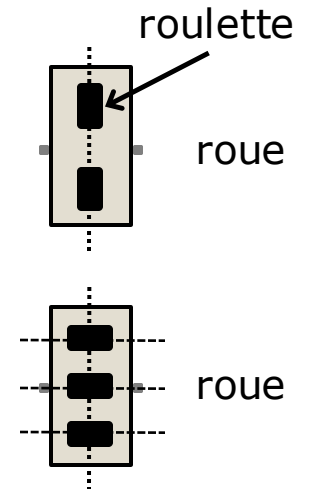
$$[\sin(\alpha + \beta + \gamma), -\cos(\alpha + \beta + \gamma), -\ell \cos(\beta + \gamma)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r\dot{\varphi} \cos \gamma = 0$$

# Roue suédoise



**Remarque** (comportement variable selon la valeur de  $\gamma$ )

- $\gamma = 0$  : rue suédoise  $90^\circ$ . La contrainte de roulement pur devient la contrainte de roulement pur de la roue standard fixe. Il n'y a pas de contrainte de non-glissement
- $\gamma = \pi/2$  : les axes des roulettes sont parallèles à l'axe de rotation de la roue. La contrainte de non-glissement devient la contrainte de non-glissement de la roue standard fixe. La roue ne doit pas rouler car il y a les roulettes : la contrainte de roulement pur disparaît. **Il s'agit d'un cas dégénéré !**



# Contraintes de non-glissement et de roulement pur

- On peut écrire d'une *façon compacte* les contraintes de non-glissement et de roulement pur, pour toutes les roues d'un robot
- Pour plus de simplicité, on considérera seulement les **roues standards**

Soit

$$N = N_f + N_{so}$$

↑                      ↙

Nombre de roues fixes      Nombre de roues centrées/décentrées orientables :  $N_{so} = N_s + N_o$

## Contraintes de non-glissement

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = \mathbf{0}$$

(**uniquement** roues fixes et centrées orientables)

où

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{C}_{1f} \in \mathbb{R}^{N_f \times 3}, \mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s) \in \mathbb{R}^{N_s \times 3}$$

$\boldsymbol{\beta}_s \in \mathbb{R}^{N_s}$  : vecteur des angles des roues centrées orientables



# Contraintes de non-glissement et de roulement pur

## *Contraintes de roulement pur*

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_{so}) \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}$$

où

$$\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_{so}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1f} \\ \mathbf{J}_{1so}(\boldsymbol{\beta}_{so}) \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{J}_{1f} \in \mathbb{R}^{N_f \times 3}, \mathbf{J}_{1so}(\boldsymbol{\beta}_{so}) \in \mathbb{R}^{N_{so} \times 3}$$

$\mathbf{J}_2 = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  : matrice diagonale avec les rayons  $r_i$  des  $N$  roues

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_{so} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N : \text{vecteur des angles de rotation propre des roues}$$

$\boldsymbol{\beta}_{so} \in \mathbb{R}^{N_{so}}$  : vecteur des angles des roues centrées et décentrées orientables

# Manœuvrabilité d'un robot

Définition:

$$\delta_m = 3 - \text{rank}[\mathbf{C}_1^*(\beta_s)]$$

**Degré de mobilité**


$$\delta_s = \text{rank}[\mathbf{C}_{1s}(\beta_s)]$$

**Degré de dirigeabilité**

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

**Degré de manœuvrabilité**

Pour des robots mobiles d'intérêt pratique  $\delta_m$  et  $\delta_s$  doivent satisfaire les trois conditions suivantes :

- a)  $1 \leq \delta_m \leq 3$  : si  $\text{rank}[\mathbf{C}_1^*(\beta_s)] = 3$  aucun mouvement possible; il faut que  $\delta_m \geq 1$
- b)  $0 \leq \delta_s \leq 2$  
  - $\delta_s = 0$  : robots sans roues orientables ( $N_s = 0$ )
  - $\delta_s = 2$  : possible seulement pour des robots sans roues fixes ( $N_f = 0$ )
- c)  $2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3$

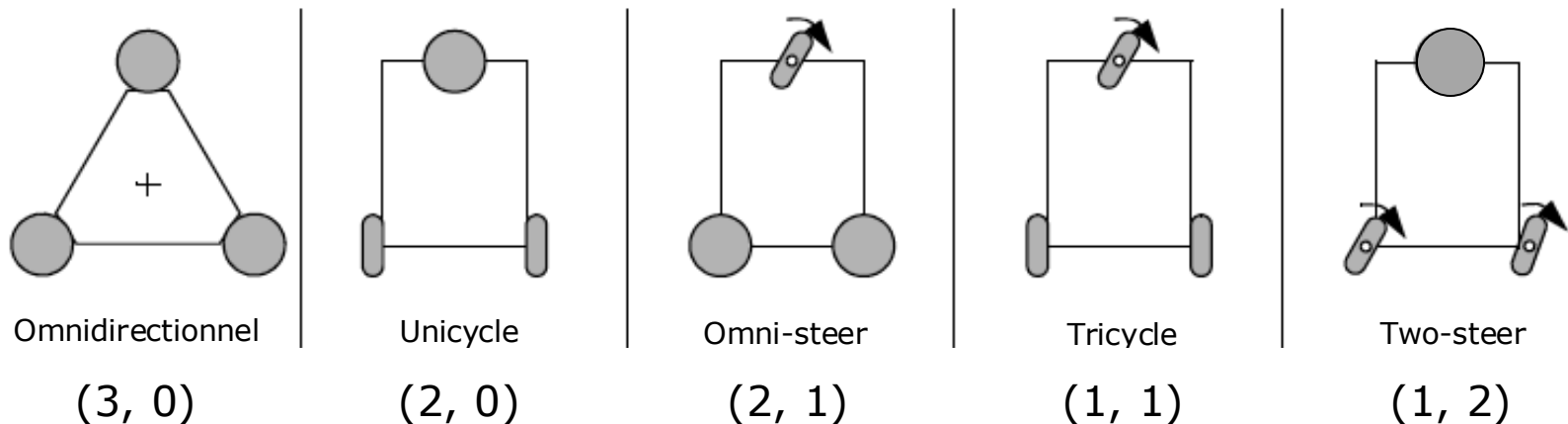
# Manœuvrabilité d'un robot


- En conclusion, seulement 5 couples  $(\delta_m, \delta_s)$  sont acceptables :

$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

- On parle alors d'un robot de **type**  $(\delta_m, \delta_s)$

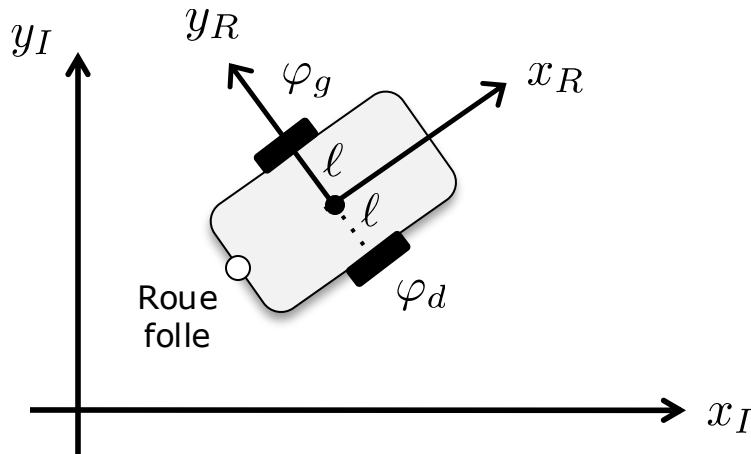
Robots à **3 roues** pour chaque type admissible (cf. "5 classes cinématiques")



**Remarque** : le symbole  indique une roue omnidirectionnelle (sphérique ou suédoise) ou une roue pivot : le type de roue choisie n'a pas d'impact sur la manœuvrabilité du robot

# Manœuvrabilité d'un robot

## Exemple 1 (robot unicycle)



- Deux roues standards fixes de rayon  $r$

**Remarque:** La *roue folle* peut être ignorée dans notre étude

- *Roue droite* :  $\alpha = -\pi/2$ ,  $\beta = \pi$

(N.B. un roulement positif produit un mouvement dans la direction  $+x_R$ )

- *Roue gauche* :  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$

- Pas de roues orientables, donc :

$$\mathbf{C}_1^*(\beta_s) = \mathbf{C}_{1f}, \quad \mathbf{J}_1(\beta_{so}) = \mathbf{J}_{1f}, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \varphi_g \end{bmatrix}$$



Vecteur des angles de rotation propre des roues (droite et gauche)

# Manœuvrabilité d'un robot

- Les deux roues sont parallèles, donc on obtient seulement une équation indépendante pour la **contrainte de non-glissement** :

$$\mathbf{C}_{1f} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = 0$$

- Pour les **contraintes de roulement pur** :

$$\mathbf{J}_{1f} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ell \\ 1 & 0 & -\ell \end{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\varphi}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↑  
Matrice diagonale  $2 \times 2$  avec  
les rayons des deux roues

**En conclusion :**

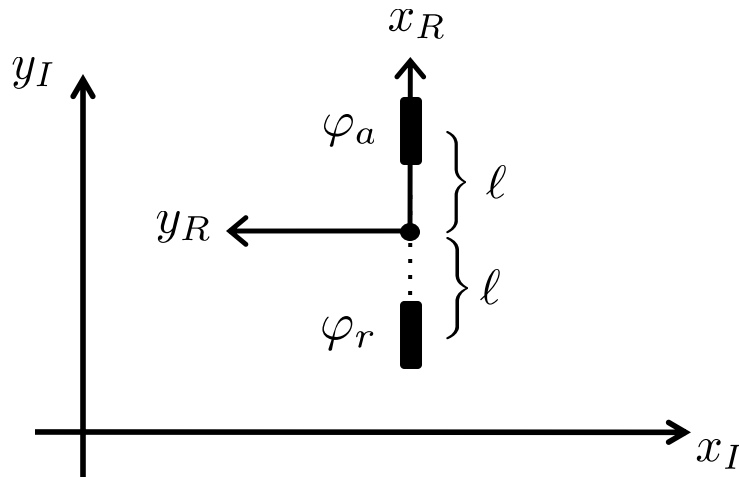
$$\delta_m = 3 - \text{rank}(\mathbf{C}_{1f}) = 3 - 1 = 2 \quad (2 \text{ DDL du châssis du robot sont manipulables à travers des changements de vitesse des roues})$$

$$\delta_s = \text{rank}(\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)) = 0$$

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 2$$

# Manœuvrabilité d'un robot

## Exemple 2 (vélo à roues fixes)



- Deux roues standards fixes de rayon  $r$

- *Roue avant* :  $\alpha = 0, \beta = \pi/2$

- *Roue arrière* :  $\alpha = \pi, \beta = -\pi/2$

ou de façon équivalente :

$$\alpha = -\pi, \beta = 3\pi/2$$

- Pas de roues orientables, donc :

$$\mathbf{C}_1^*(\boldsymbol{\beta}_s) = \mathbf{C}_{1f}, \quad \mathbf{J}_1(\boldsymbol{\beta}_{so}) = \mathbf{J}_{1f}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_r \end{bmatrix}$$



Vecteur des angles de rotation propre  
des roues (avant et arrière)

# Manœuvrabilité d'un robot

## Contraintes de non-glissement

Roue avant :

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), \ell \sin \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I &= [\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \ell \sin(\pi/2)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I \\ &= [0 \quad 1 \quad \ell] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = 0 \end{aligned}$$

Roue arrière :

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta), \ell \sin \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I &= [\cos(\pi/2), \sin(\pi/2), \ell \sin(-\pi/2)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I \\ &= [0 \quad 1 \quad -\ell] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = 0 \end{aligned}$$

On peut récrire les deux équations précédentes de façon compacte comme :

$$\mathbf{C}_{1f} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ell \\ 0 & 1 & -\ell \end{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Manœuvrabilité d'un robot

## Contraintes de roulement pur

Roue avant :

$$\begin{aligned} & [\sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta), -\ell \cos \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_a \\ &= [\sin(\pi/2), -\cos(\pi/2), -\ell \cos(\pi/2)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_a \\ &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_a = 0 \end{aligned}$$

Roue arrière :

$$\begin{aligned} & [\sin(\alpha + \beta), -\cos(\alpha + \beta), -\ell \cos \beta] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_r \\ &= [\sin(\pi/2), -\cos(\pi/2), \ell \cos(\pi/2)] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_r \\ &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - r \dot{\varphi}_r = 0 \end{aligned}$$


On peut récrire les deux équations précédentes de façon compacte comme :


$$\mathbf{J}_{1f} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - \mathbf{J}_2 \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta) \dot{\mathbf{q}}_I - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_a \\ \dot{\varphi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Manœuvrabilité d'un robot


**En conclusion :**

$$\delta_m = 3 - \text{rank}(\mathbf{C}_{1f}) = 3 - \text{rank} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ell \\ 0 & 1 & -\ell \end{bmatrix} \right) = 3 - 2 = 1$$


$$\delta_s = \text{rank}(\mathbf{C}_{1s}(\boldsymbol{\beta}_s)) = 0$$


$$\delta_M = \delta_m + \delta_s = 1 + 0 = 1$$

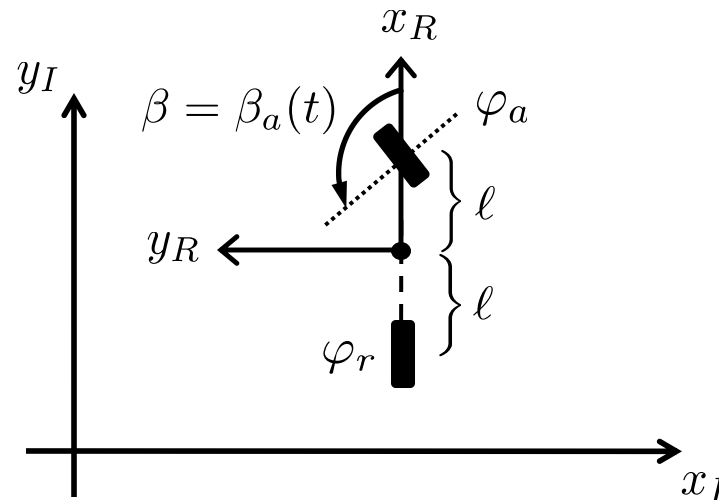
- Seulement 1 DDL du châssis du robot peut être directement manipulé à travers des changements de vitesse des roues
- Le degré de mobilité du vélo est inférieur à celui du robot unicycle



$\delta_s = 0$  comme pour le robot unicycle :  
pas de braquage de roues !

# Manœuvrabilité d'un robot

**Exercice** (vélo avec roue avant orientable) :



1. Montrer que

$$\delta_m = \delta_s = 1$$

et mettre le résultat en rapport avec celui de l'**Exemple 2**

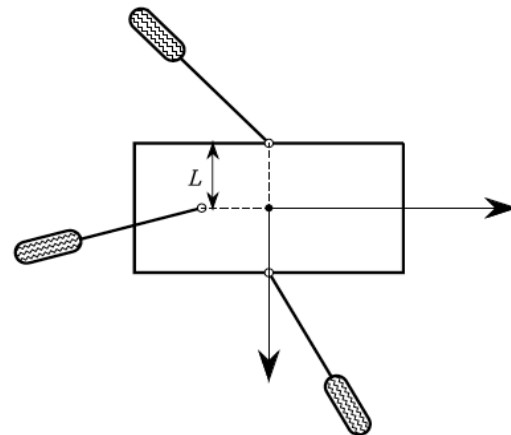
2. Déterminer le degré de manœuvrabilité d'un vélo avec *roue avant fixe* et *roue arrière orientable* (N.B. il a été démontré que ce type de vélo n'est pas impossible à conduire, mais qu'il demande beaucoup plus d'effort pour la commande)

# Commandabilité d'un robot

« **Relation inverse** » entre la *commandabilité* et la *manœuvrabilité* d'un robot (une définition mathématique rigoureuse de commandabilité existe, mais elle ne sera pas présentée dans ce cours)

**Exemple I :** *Déplacement d'un robot omnidirectionnel à 3 roues décentrées orientables*

- La conversion de la vitesse longitudinale et angulaire du robot en commande individuelle des roues demande un traitement *important*
- Le robot est très manœuvrable mais il est **peu commandable**



# Commandabilité d'un robot

## Exemple II : *Déplacement rectiligne*

- Robot de type tricycle (ou voiture)
  - *Simple* : bloquer la roue orientable et rouler
- Robot unicycle à conduite différentielle
  - Les deux moteurs des deux roues doivent fournir exactement le même profil de vitesse
  - *Difficile* : variantes entre les roues et les moteurs
- Robot à 4 roues suédoises (ex. Uranus)
  - *Très difficile* : les quatre roues suédoises doivent avoir *exactement* la même vitesse pour que le robot suive une ligne droite

# Stabilité, manœuvrabilité et commandabilité

- D'une manière générale, plus un robot mobile est *manœuvrable*, plus l'*estimation de trajectoire* à partir du roulement des roues (odométrie) sera imprécise à cause des dérapages, glissements, etc.
  - Plus la manœuvrabilité d'un robot mobile est élevée, moins le robot est *commandable* aisément, ne serait-ce que pour un mouvement simple
- 
- En résumé, il n'y a pas une configuration idéale pour la locomotion à roues qui maximise simultanément la *stabilité*, la *manœuvrabilité* et la *commandabilité*
  - Des tendances claires existent, réalisant un **compromis** de ces trois besoins

# Locomotion hybride

- Jambes  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Bonne manœuvrabilité en terrain brut} \\ \bullet \text{ Inefficaces sur sol plat : commande sophistiquée} \end{array} \right.$

## a) Jambes à roues

Roues au bout des jambes pour combiner les avantages

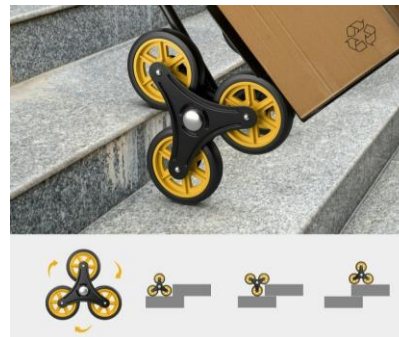
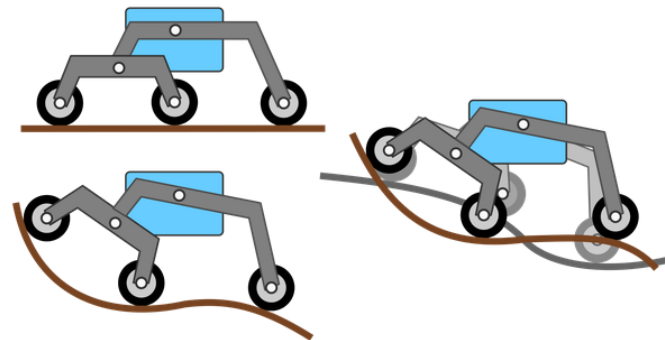
- Adaptation passive au terrain

**Ex.** Suspension “rocker-bogie” des rovers d’exploration sur Mars

**Ex.** Roue pivotante pour monter les escaliers

**Ex.** *Shrimp* (EPFL)

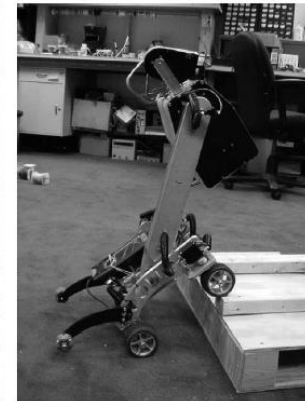
- Six roues motorisées
- Franchit des « grands » obstacles (ex. marches)



# Locomotion hybride

## Ex. *Personal Rover* (CMU)

- Franchit les obstacles en déplaçant le centre de gravité grâce à un balancier



## Ex. *ANYmal generation C* (ETH et Swiss-Mile) et *B-W* de Unitree

- Quatre roues motorisées
- Hybride entre une voiture et un robot quadrupède



ANYmal



B-W

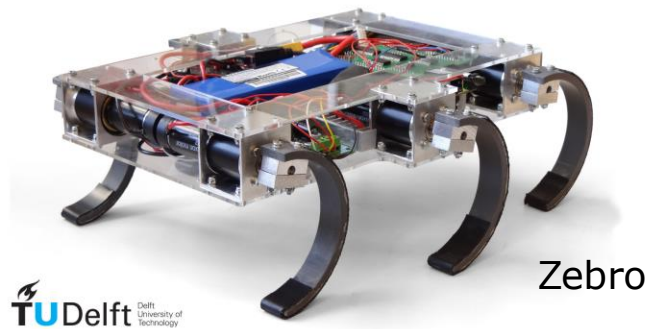
# Locomotion hybride

**b) Whegs:** « legged wheels »  
ou roues à jambes

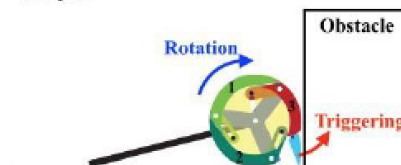
**Ex. Wheel Transformer**  
(Seoul National University\*)

**Ex. Zebro** (TU Delft, Robotics  
Institute) et RHex (Boston Dynamics)

- Six whegs semicirculaires



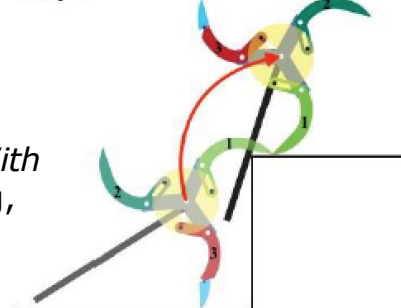
Step 1



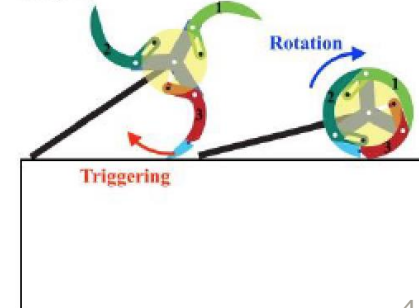
Step 2



Step 3



Step 4



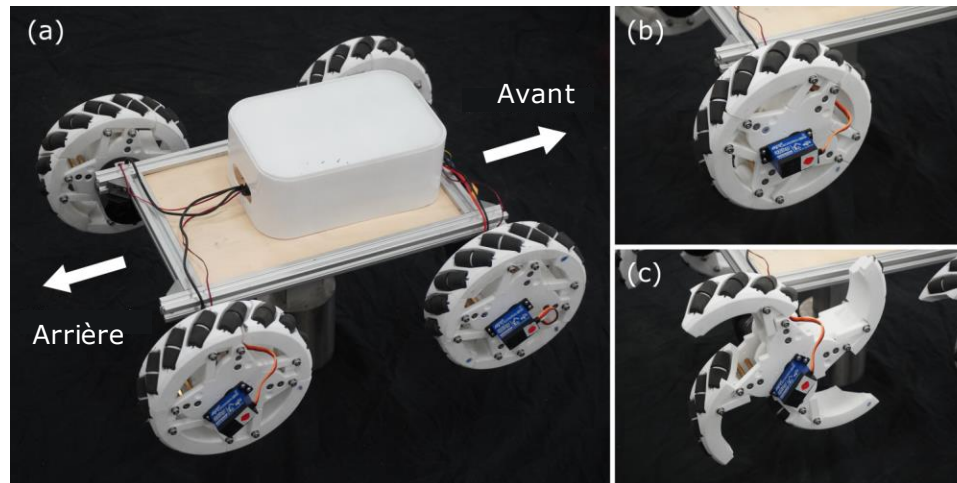
\* "Wheel Transformer: A Wheel-Leg Hybrid Robot With Passive Transformable Wheels", Y.-S. Kim, G.-P. Jung, H. Kim, K.-J. Cho, C.-N. Chu. IEEE Trans. Robotics, vol. 30, n. 6 pp. 1487-1498, 2014



# Locomotion hybride

**Ex. OmniWheg** (ShanghaiTech University\*)

- Quatre whogs omnidirectionnelles (suédoises 45°)



\* "OmniWheg: An Omnidirectional Wheel-Leg Transformable Robot", R. Cao, J. Gu, C. Yu, A. Rosendo, in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intel. Robots Syst., pp. 5626-5631, 2022

# Ch. 2: Robotique Mobile

- Petit historique

**Partie 1**

- Systèmes, locomotions, applications

**Partie 2**

- Marché mondial et besoins technologiques

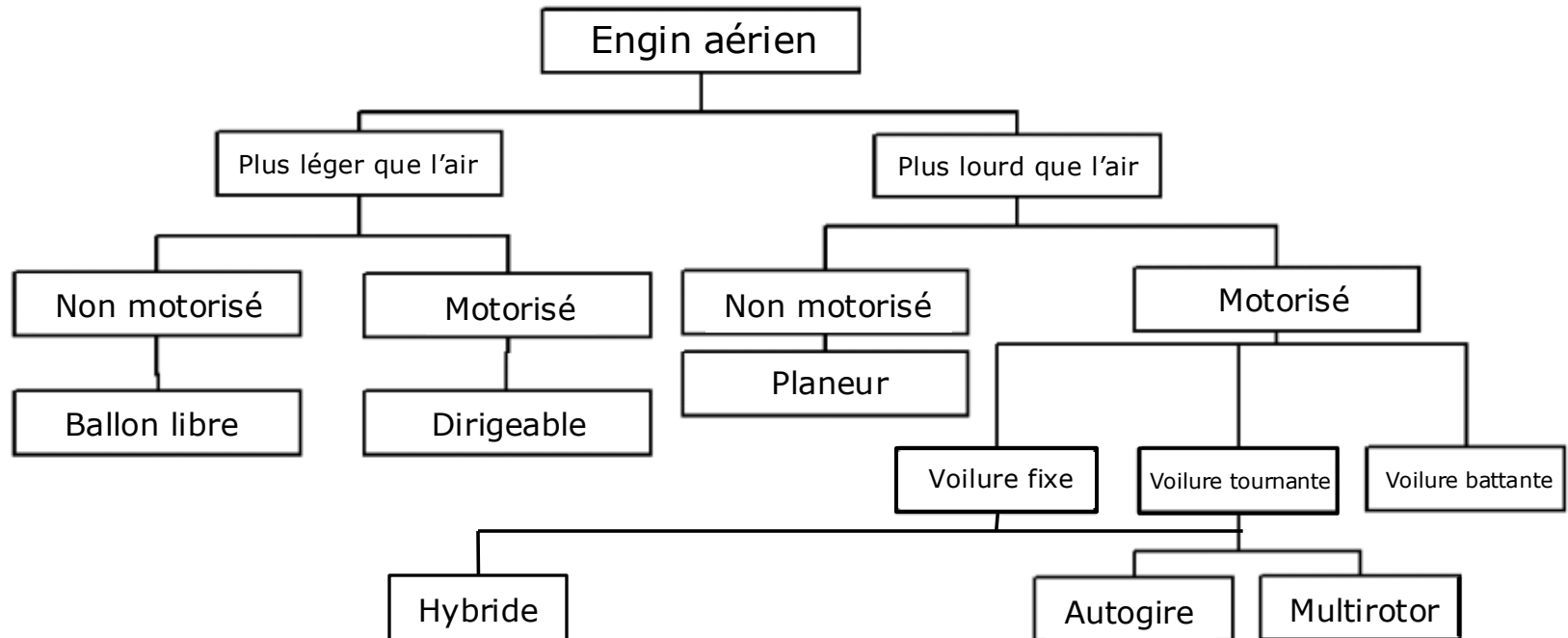
**Partie 3**

- Effecteurs et actionneurs

**Partie 4**

- Robots mobiles à jambes, à roues et [aériens](#) **Partie 5**

# Classification générale des engins aériens



Autogire ou gyrocopter



Hexarotor

# Quadrirotors

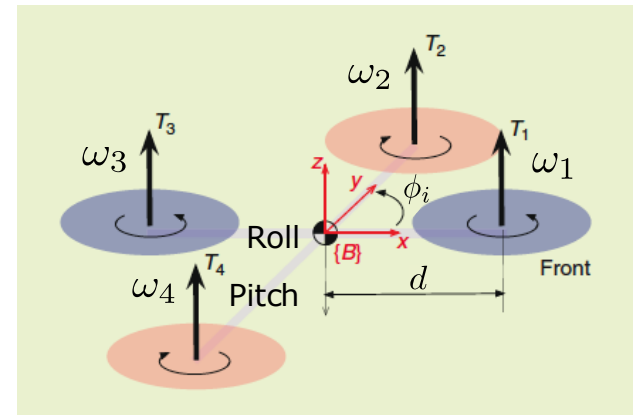
Quadrirotor : micro hélicoptère (électrique) à quatre hélices



- Très agile et manœuvrable
- VTOL et vol stationnaire
- Autonomie limitée (15-30 min)
  - Batteries spéciales (LiPo)
- Charge utile limitée (quelques kilos)



- Entrée de commande : *vitesse angulaire*  $\omega_i$  des quatre hélices  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Configuration des moteurs : *cross-flyer* ou *X-flyer*
- Système *sous-actionné* (4 entrées vs 6 DDL) : drones omnidirectionnels proposés récemment
- Capteurs embarqués : gyroscopes, accéléromètres et magnétomètres à 3 axes
- Lois de commande non linéaires (stabilisation, suivi de trajectoire 3D)



Configuration *cross-flyer*

"Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation"  
L. Carrillo, A. López, R. Lozano, C. Pégard, Springer, 2013

# Quadrirotors : exemples



*AR.drone* de Parrot  
[www.parrot.com](http://www.parrot.com)

- Prix: 300 €
- Taille: 451 × 517 mm
- Moteurs: 4 sans balais, 14.5W, 28500 RMP
- Poids à vide: 420 g
- Pas de charge utile
- 2 cameras (avant et vers le sol)
- Max vitesse enregistrée: 11 m/s
- Max altitude enregistrée: 200 m
- Contrôle: smartphone
- Autonomie: 12 min.



*Pelican* de AscTec

- Prix: à partir de 5000 €
- Taille: 651 × 651 × 188 mm
- Moteurs: 4 sans balais (sensorless), max 160 W
- Poids à vide: 620 g
- Max poids au décollage: 1650 g
- Rayon d'action: 1 km<sup>2</sup>
- Max charge utile: 650 g
- Max vitesse: 3-16 m/s
- Max taux de montée: 8 m/s
- Autonomie: 15-20 min.

# Quadrirotors : exemples



*Mavic 2 Pro de DJI*  
[www.dji.com](http://www.dji.com)

- Prix: 1500 €
- Dimensions: 322 × 242 × 84 mm
- Batterie Lipo 4S: capacité 3.859 Ah, tension 15.4 V
- Poids au decollage: 907 g
- Distance de vol max (à une vitesse constante de 50 km/h): 18 km
- Max vitesse ascensionnelle et de descente: 5 m/s et 3 m/s
- Max vitesse de vol (au niveau de la mer, sans vent): 72 km/h
- Temps de vol max (sans vent, vitesse constante de 25 km/h): 31 min.

# Multirotors à l'échelle humaine ...

*Urban Air Mobility* : NASA, Uber, Volocopter, Airbus, Boeing, etc.



*Volocopter 2X* (multirotor à deux places en production depuis 2018) :

- 18 hélices propulsées par des moteurs électriques
- Tests effectués à Dubai, Rome, New York et Osaka (service de taxi pour la *2025 World Exposition*)



# Engins aériens à voilure fixe et dirigeables



Maveric de *Prioria*



DISCO de *Parrot*

- Moins agiles que les quadrirotors
- Fiables et robustes
- Bonne autonomie
- La charge utile peut être élevée
- Contrôle relativement simple



## Dirigeables



- Lents et peu manœuvrables
- Stables (peu de vibrations)
  - Adaptés à la surveillance
- Bonne autonomie
- Contrôle simple
- Sensibilité aux perturbations externes (ex. rafales de vent et turbulences)



# Comparaison des principes de vol

1 = mauvais, 3 = bon

	Voilure fixe	Multirotor	Voilure battante	Autogire	Dirigeable
Coût énergétique	2	1	2	2	3
Coût du contrôle	2	1	1	2	3
Charge utile/volume	3	2	2	2	1
Manœuvrabilité	2	3	3	2	1
Vol stationnaire	1	3	2	1	3
Vol à basse vitesse	1	3	2	2	3
Vulnérabilité	2	2	3	2	2
VTOL (Vertical Take-off and Landing)	1	3	2	1	3
Endurance	2	1	2	1	3
Miniaturisation	2	3	3	2	1
Usage à l'intérieur	1	3	2	1	2
<b>Total</b>	<b>19</b>	<b>25</b>	<b>24</b>	<b>18</b>	<b>25</b>